

## Al fin de cuentas, ¿qué es una recta en la Geometría del Taxista?

### After all, what is a straight line in the taxicab geometry?

Daniela Bonilla-Barraza<sup>I</sup>, Marcela Parraguez-González<sup>II</sup>, Leonardo Solanilla-Chavarro<sup>III</sup>.

**Resumen:** En este artículo proponemos un par de definiciones métricas de línea recta para la Geometría Discreta del Taxista. Esto quiere decir que no partimos de una definición algebraica para las rectas, sino que usamos únicamente la restricción de la métrica del taxista al plano discreto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Con ello, obtenemos rectas que se comportan bien bajo la acción del grupo de isometrías. Las definiciones propuestas están ligadas al halo de un punto, un concepto necesario que remedia la ausencia de una noción pertinente de dimensión en esta geometría discreta. Entre las rectas encontradas, se distinguen algunas relacionadas con las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales.

**Palabras Clave:** Geometría del Taxista, líneas rectas, secciones cónicas, dimensión topológica, ecuaciones diofánticas lineales.

**Abstract.** In this paper, we propose a couple of metric definitions of straight line for the Discrete Taxicab Geometry. In other words, we do not presuppose any algebraic property for the line; instead, we use only the restriction of the taxicab metric to the discrete plane  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . In this way, we get straight lines that behave well under the action of the isometry group. The proposed definitions depend on the notion of halo, a way to remedy the lack of a proper notion of dimension for this discrete geometry. Some of the found lines are closely related to the solution set to a linear Diophantine equation.

**Keywords:** Taxicab Geometry, straight line, conic sections, topological dimension, linear Diophantine equations.

I Docente, Universidad de La Serena, Chile, danielabonillab@gmail.com

II Docente, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile marcela.parraguez@pucv.cl

III Docente, Universidad del Tolima, Colombia leonsolc@ut.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje los conceptos matemáticas se conecta a veces con el desarrollo o la adquisición del pensamiento matemático a través de la senda de la modelación. En búsqueda de una propuesta para la enseñanza de las secciones cónicas a nivel secundario, hemos encontrado un modelo didáctico<sup>1</sup> que constituye, por sí mismo, un objeto de estudio para las matemáticas. La investigación primaria de Bonilla y Parraguez (2013), enmarcada en la teoría de los modos de pensamiento de Sierpiska (2000) que distingue tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG) (los objetos matemáticos son presentados mediante una representación geométrica), analítico-aritmético (AA) (los objetos matemáticos son presentados a través de relaciones numéricas) (se recurre más bien a las propiedades de los objetos matemáticos o a su caracterización a través de axiomas) y analítico-estructural (AE) (se recurre más bien a las propiedades de los objetos matemáticos o a su caracterización a través de axiomas), pretendía que los aprendices comprendieran la elipse como figura representada en el plano discreto (SG), como conjunto de pares ordenados que satisfacen una ecuación (AA) y como lugar geométrico (AE). Para tal fin, se elaboró una propuesta didáctica de la elipse basada en la llamada Geometría del Taxista. No obstante, la adecuación de los contenidos derivó en un objeto matemático distinto, aunque emparentado con el plano usual del taxista. Sorprendentemente, la dificultad principal para entender otras cónicas, como las parábolas, radicaba en que no se tenía una definición precisa de línea recta. Por esta razón, aquí nos dedicamos a explorar una noción pertinente para esta importante figura geométrica.

Comúnmente atribuida a Minkowski<sup>2</sup> en los albores del siglo XX, la Geometría del Taxista se obtiene cambiando la distancia euclidiana entre dos puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  del plano  $\mathbb{R}^2$  por:  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

El cambio de distancia o métrica introduce modificaciones radicales.

Fue Menger (1952) quien usó por primera vez el expresivo sobrenombre “del taxista”, evocando la manera como un automóvil recorre las calles y avenidas de una ciudad.

1 Modelo diseñado a partir de una transposición didáctica, esto es, según Chevallard (1985, p. 39), “un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El ‘trabajo’ que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica”.

2 Ciertamente, las ideas centrales detrás de la definición contemporánea de espacio métrico ya están presentes en Minkowski (1910, *Erstes Kapitel*, 1.).

El libro de Krause (1975) y algunos artículos aparecidos en *The Pi Mu Epsilon Journal* al comienzo de la década de 1980 (*v.* Reynolds (1980), Moser y Kramer (1982), Iny (1984)), dieron renovado empuje a las investigaciones sobre esta geometría. No obstante, el verdadero despegue contemporáneo de la Geometría del Taxista comenzó en 1997 con los trabajos de Rüstem Kaya en Turquía. Ente 1997 y 2010, Kaya fue el autor más prolífico en este campo.

En la Sección 2, se introducen algunos ajustes a la Geometría del Taxista (GT), convenientes para la enseñanza de las cónicas en la secundaria. Ellos se materializan en la estructura que hemos llamado Geometría Discreta del Taxista (GDT). La Sección 3 se dedica al estudio del grupo de isometrías de la GDT, el cual juega un papel protagónico en el resto del artículo. El centro de este artículo ocupa la sección 4, en la cual se construye una primera definición conveniente de línea recta para la GDT, la cual se basa en la noción de halo. En la Sección 5 se generaliza esta primera definición. La extensión del concepto de recta permite abarcar toda una nueva clase de rectas que guardan estrecha relación con las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales. Finalmente, se bosquejan algunas conclusiones sobre el procedimiento empleado para llegar a dichas definiciones.

## 2. LA GEOMETRÍA DISCRETA DEL TAXISTA (GDT)

En el intento mencionado de simplificación didáctica, la GT fue modificada de tal suerte que los números reales  $\mathbb{R}$  fueron remplazados por los enteros  $\mathbb{Z}$ . En concordancia, aquí entendemos que la Geometría Discreta del Taxista, o GDT, es una estructura matemática doble (algebraica y métrica) definida sobre el producto cartesiano  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Al trabajar con los enteros en lugar de los reales, se espera simplificar grandemente la situación para los aprendices. En particular, se evita la espinosa completitud de los números reales.

Los elementos de  $\mathbb{Z}^2$  se llaman puntos, como es habitual en Geometría. La estructura algebraica en  $\mathbb{Z}^2$  es aquella de módulo bilateral sobre el dominio entero  $\mathbb{Z}$ . Es decir, la suma se realiza en cada componente y un escalar entero multiplica las dos componentes. Concretamente, si  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$  y  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ,  $z \bullet (x_1, y_1) = (zx_1, zy_1)$ .

Lo que marca la diferencia con la Geometría Euclidiana es la parte topológica de la estructura. Como el lector lo habrá entendido seguramente desde la Introduc-

ción, la distancia entre los puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$  es  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .

Con esta distancia o métrica,  $\mathbb{Z}^2$  posee una estructura de espacio métrico diferente a la usual (asociada a la pitagórica o raíz cuadrada de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas). La nueva métrica remeda la forma cómo un taxi recorre una ciudad: sólo puede recorrer tramos en dirección norte-sur o este-oeste (no puede pasar diagonalmente a través de los edificios).

En breve, nuestra estructura se deja escribir como  $(\mathbb{Z}^2, +, \bullet, d)$ . El plano cartesiano discreto está equipado con la suma del grupo abeliano subyacente, el producto por escalares enteros y la métrica del taxista.

La mayor dificultad de la GDT o la GT, en comparación con la Geometría Euclidiana (GE), es la fragilidad de la compatibilidad entre las estructuras algebraica y métrica. En efecto, las figuras geométricas de la GE se pueden definir métrica o algebraicamente y las dos definiciones resultan ser equivalentes. Esto no sucede con las geometrías del taxista, al punto de que una definición métrica produce, en general, figuras distintas a aquellas de la definición algebraica. Naturalmente, la situación didáctica cognitiva también se complica puesto que la frontera entre los modos de pensamiento analítico-estructural (AE) y analítico-aritmético (AA) para la recta se desvanece. A este asunto volveremos más adelante, cuando enfrentemos la noción de recta en la GDT.

### 3. GRUPO DE ISOMETRÍAS DE LA GDT

Este grupo de isometrías brinda un instrumento muy útil para entender ciertos aspectos de la GDT y para obtener nuevas figuras a partir de figuras ya conocidas. En verdad, la imagen de una figura geométrica (recta, en nuestro caso) bajo una de estas isometrías debe ser una figura del mismo tipo (recta, en este artículo).

Las isometrías de la GDT son las aplicaciones  $i : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  que preservan las distancias. O sea,  $d(i(x_1, y_1), i(x_2, y_2)) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ , para cualquier par de puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Nuestra familiaridad con la GE nos hace olvidar que, en otras geometrías, las isometrías son distintas.

En efecto, el grupo de isometrías del plano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  del taxista consta de:

1. Las translaciones  $t_{m,n} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  
 $t_{m,n}(x, y) = (x, y) + (m, n) = (x + m, y + n)$ , definidas para cada  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ .  
 $t_{0,0}$  es la translación identidad.
2. Las isometrías ortogonales, es decir, las rotaciones y las reflexiones.
  - a. Las rotaciones  $r_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  alrededor del origen son cuatro. Ellas corresponden a los ángulos de  $0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$ . Mejor,  $r_k(x, y)$  es la rotación del punto  $(x, y)$  alrededor del origen  $(0, 0)$  en un ángulo de  $k\pi/2$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .  
 $r_0$  es la rotación identidad.
  - b. Las cuatro reflexiones  $r_L : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  corresponden a cuatro rectas distinguidas: el eje horizontal o eje de las  $x$ , el eje vertical o eje de las  $y$ , la diagonal  $y = x$  y la diagonal  $y = -x$ . En concreto,  $r_x(x, y) = (x, -y)$ ,  $r_y(x, y) = (-x, y)$ ,  $r_{y=x}(x, y) = (y, x)$  y  $r_{y=-x}(x, y) = (-y, -x)$ .

El subgrupo de isometrías formado por las reflexiones y las rotaciones es el grupo ortogonal de la GDT. Es fácil ver que toda isometría de  $\mathbb{Z}^2$ , con la métrica discreta del taxista, se puede escribir de manera única como la composición de un elemento de este grupo ortogonal con una translación. La demostración de estos resultados se puede realizar, *mutatis mutandis*, a partir de los resultados similares de Kocayusufoğlu y Özdamar (1998) para la GT.

#### 4. HACIA UNA NOCIÓN ÚTIL DE RECTA

No hay una única noción de recta en la GDT, o la GT; la literatura conocida ofrece varias alternativas. A continuación, discutimos las definiciones conocidas y proponemos una nueva, que se adapta mejor a las exigencias convenidas en las dos secciones anteriores.

##### Rectas euclidianas

En el estudio de la GT a partir de un conjunto de axiomas, es habitual identificar los puntos y las líneas rectas con aquellos y aquellas de la GE<sup>1</sup>. De esta manera, se obtiene un sistema axiomático en el que se verifican muchos teoremas de la GE, pero se pierde la propiedad LAL (lado ángulo lado):

---

3 Esta hipótesis está justificada, en parte, por la claridad del concepto de bisectriz en la GT.

*“Cuando dos lados y el ángulo incluido entre ellos de un triángulo son congruentes con los dos lados correspondientes y el ángulo incluido entre ellos, de otro triángulo, los dos triángulos son congruentes”.*

Por ello, se dice que la GT es una geometría no euclidiana. Un estudio detallado de este sistema se puede consultar en Dawson (2007). Sin embargo, esta definición es caprichosa porque presupone, implícitamente, propiedades algebraicas de las rectas.

Ahora bien, si uno quiere apoyarse sólo en la parte métrica de la estructura, esta convención no es satisfactoria; más aún cuando queremos sacar provecho del grupo de isometrías. De otro lado, desde el punto de vista de la enseñanza, es útil mostrar a los aprendices otras nociones de rectas que también, conducen a resultados válidos. Por todas estas razones, decidimos tomar una alternativa distinta a la de las rectas euclidianas.

### **Rectas como bisectrices**

Una alternativa más interesante surge del estudio de las cónicas en la GT, v. Reynolds (1980, p. 84). Si la diferencia de las distancias de los puntos de una hipérbola a sus focos se hace cero, deberíamos encontrar una recta. Bueno, así lo sugiere nuestra experiencia con la GE. Así también lo entendió Iny (1984, p. 645), al criticar la suposición algebraica de Moser y Kramer (1982) porque *“they do not attempt to justify their definition of a line”*. Para solventar esta dificultad, Iny propone definir la recta como *“the locus of points in a plane equidistant from two distinct points”* (el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos distintos dados). Este fructífero punto de vista ha sido explotado igualmente por Phoebe Ho & Liu (1996): la recta o bisectriz (también *midset* en inglés) del taxista correspondiente a los puntos, distintos,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  es del conjunto

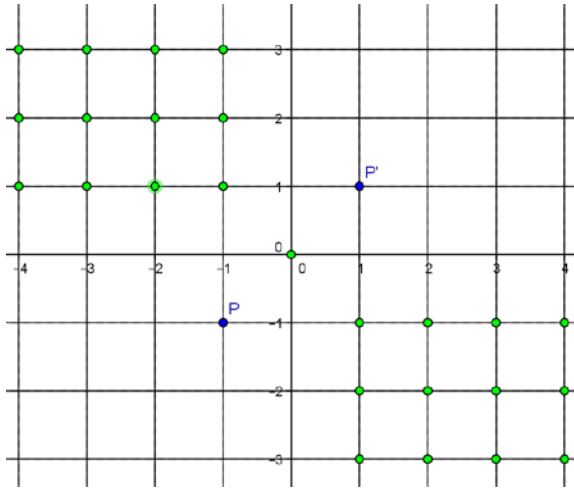
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_1, y_1)) = d((x, y), (x_2, y_2))\},$$

donde  $d$  denota la métrica de la GT.

### **Rectas como partes de una bisectriz**

Sin embargo, esta definición no produce los conjuntos esperados en la GDT; la situación se complica inesperadamente. En verdad, un sencillo ejercicio muestra que las “rectas” resultantes no son, en el caso discreto, las que esperaríamos. La Figura 1 ilustra el problema.

**Figura 1.** El conjunto de puntos verdes que equidistan de los puntos azules  $P$  y  $P'$ .



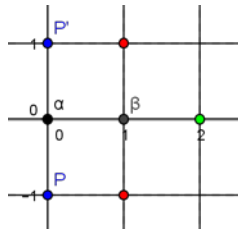
Las complicaciones se pueden resolver de la manera siguiente. Para cada  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , definimos el halo de  $(x, y)$  como el conjunto

$$H(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} (x-1, y-1), (x, y-1), (x+1, y-1), (x-1, y), \\ (x+1, y), (x-1, y+1), (x, y+1), (x+1, y+1) \end{array} \right\}.$$

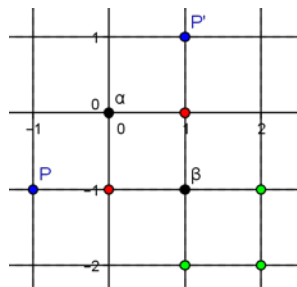
Con esto, dados dos puntos distintos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ , una recta en la GDT es un subconjunto  $L \subset M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : d((x, y), (x_1, y_1)) = d((x, y), (x_2, y_2))\}$  con la propiedad de que existe una aplicación inyectiva, o parametrización,  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $\alpha(\mathbb{Z}) = L$ , tal que  $\alpha(z+1) \in H(\alpha(z))$ , pero  $\alpha(z+1) \notin H(\alpha(z-1))$ , para cada  $z \in \mathbb{Z}$ .

En breve, la última condición de la definición anterior se puede escribir como  $\alpha(z+1) \in H(\alpha(z)) - (H(\alpha(z-1)) \cap H(\alpha(z)))$ , para cada  $z \in \mathbb{Z}$ . De esta manera, se explica como avanza la curva, a medida que los  $z \in \mathbb{Z}$  crecen. Debido a las isometrías de la sección anterior, los casos presentados en las Figuras 2a y 2b cubren una gran cantidad de las situaciones posibles. Los puntos verdes señalan las posiciones permitidas  $\alpha(z+1)$ ; los rojos; las prohibidas; los negros, los puntos conocidos de la recta:  $\alpha = \alpha(z-1)$  y  $\beta = \alpha(z)$ ; y los azules  $P$  y  $P'$ , los puntos que sirven para definir la recta.

**Figura 2.** Una forma del avance de una recta.



**Figura 2b.** Otra forma del avance de una recta.



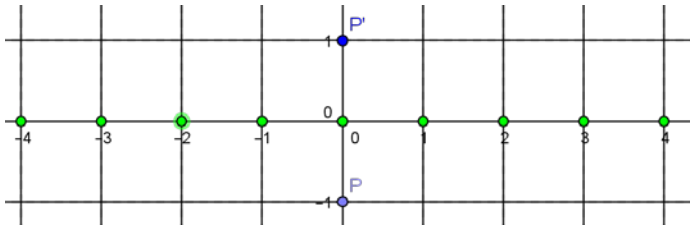
### Rectas sencillas

Las rectas de esta geometría pueden, pues, adoptar formas muy complejas; nada evidentes para la intuición euclidiana. Así lo dejan ver simples ejercicios con la definición anterior. A pesar de ello, dichas rectas constan de partes horizontales, verticales u oblicuas. Por eso, para la enseñanza de las rectas en un primer curso sobre la GDT, basta considerar rectas de las tres clases siguientes: 1. Rectas horizontales, verticales y oblicuas. 2. Rectas compuestas de dos partes, las cuales constan de infinitos puntos en una oblicua e infinitos puntos en una horizontal o vertical. 3. Rectas compuestas de tres partes, o sea, constan de finitos puntos en una oblicua y una parte infinita horizontal o vertical; o al revés: tienen finitos puntos en una recta horizontal o vertical e infinitos puntos en su parte oblicua.

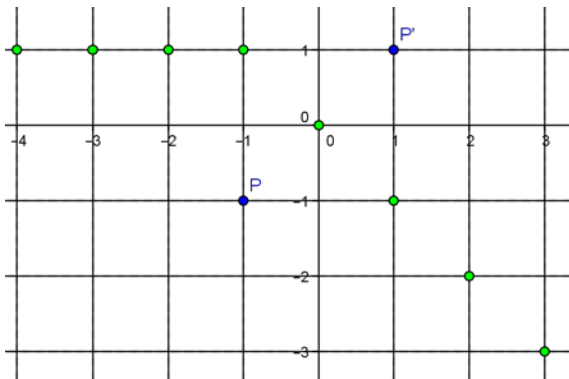
La restricción a este subconjunto de rectas no compromete para nada los objetivos de la comprensión y la enseñanza; los mismos principios se pueden usar después para tratar clases más complejas de rectas. Las figuras 3a, 3b y 3c ilustran tres de rectas de la GDT.



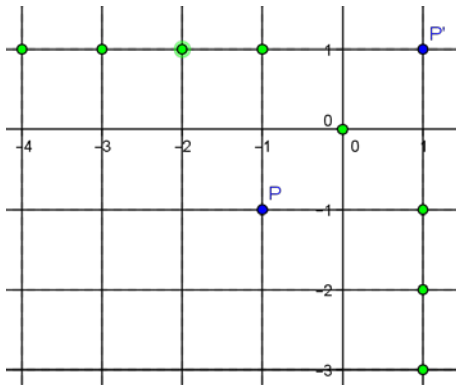
**Figura 3.** Recta de la primera clase.



**Figura 3b.** Recta de la segunda clase.



**Figura 3c.** Recta de la tercera clase.



### Representación algebraica

Observemos que la descripción algebraica (correspondiente al modo de pensar AA) de las rectas puede hacerse por tramos horizontales, verticales u oblicuos. Las rectas horizontales se pueden parametrizar por  $\alpha(z) = (c, z)$ , donde  $c$  es una constante entera; las verticales por  $\alpha(z) = (z, c)$ ; las oblicuas por  $\alpha(z) = (z, z + c)$  o  $\beta(z) = (z, -z + d)$ , para constantes  $c, d \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, si denotamos respectivamente las abscisas y ordenadas por  $x$  y  $y$ , la horizontales corresponden a  $y=c$ ; las verticales, a  $x=c$  y las oblicuas, a  $y=x+d$  o  $y=d-x$ .

Las rectas en las otras dos clases se parametrizan por tramos según las expresiones del párrafo anterior. Así por ejemplo, la recta en la figura 3b se puede describir como:

$$\alpha(z) = \begin{cases} (z, -1) & z \leq -1 \\ (z, -z) & z \geq 0 \end{cases}.$$

De manera similar, la recta en la Figura 3c se explica por:

$$\alpha(z) = \begin{cases} (z, -1) & z \leq -1 \\ (z, -z) & z = 0 \\ (1, -z) & z \geq 1 \end{cases}.$$

No se debe olvidar que la imagen de una recta de la GDT, bajo una de las isometrías de la GDT, es, de nuevo, una recta de la GDT. Se trata de un hecho evidente, ya que la definición de línea recta usa únicamente las propiedades métricas del espacio  $\mathbb{Z}^2$ .

## 5. LAS RECTAS COMO 1-VARIEDADES TOPOLÓGICAS GENERALIZADAS

Esta manera de considerar las rectas corresponde al modo de pensar AE. Desde la teoría de las sub-variedades de  $\mathbb{R}^2$ , el procedimiento de recurrir al halo y a un mecanismo de iteración para producir las rectas puede parecer exótico. Por ello, conviene intentar una definición diferente de recta para la GDT.

### Insuficiencia de la noción de variedad

En un primer intento por adaptar la definición usual de variedad topológica al caso que nos ocupa, se podría pensar en algo así como, cf. Munkres (2000-1975, p. 225),

*“Una 1-variedad topológica es un espacio de Hausdorff con una base numerable tal que cada punto  $P \in C$  tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $Z$ .”*

Este proceder está condenado a la futilidad. En verdad, recordemos que la topología del orden sobre  $Z$  es la topología discreta. Como la topología métrica sobre  $\mathbb{Z}^2$  también es la discreta, se tendría que cualquier subconjunto de  $\mathbb{Z}^2$  sería una 1-variedad topológica. Esto, naturalmente, no es lo que queremos.

¿Cómo lograr, entonces, una noción diferenciadora de dimensión en  $\mathbb{Z}^2$ ? Pues bien, la ayuda viene de la noción de halo. La construcción es como sigue. Escogidos dos puntos diferentes  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ , una recta en la GDT es un subconjunto de la bisectriz  $L \subset M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : d((x, y), (x_1, y_1)) = d((x, y), (x_2, y_2))\}$ , tal que existe una aplicación inyectiva  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $\alpha(\mathbb{Z}) = L$ , tal que  $H(\alpha(z)) \cap L = \{\alpha(z-1), \alpha(z+1)\}$ , para cada  $z \in \mathbb{Z}$ . Reiteramos que la condición de Hausdorff y la de la base numerable son superfluas en la topología (relativa a la) discreta.

### Halos generales

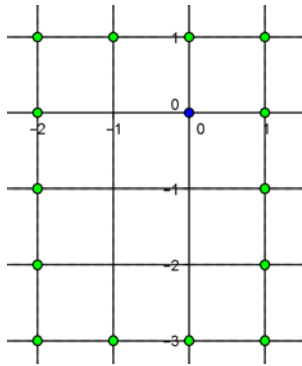
El concepto de halo es susceptible de generalizarse con gran provecho para el estudio de las rectas. Dados  $n, m, p, q \in \mathbb{Z}^+$ , podemos extender el significado de halo centrado en  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  a  $H_{n,m,p,q}(x, y) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-m, y-q), \dots, (x, y-q), \dots, (x+n, y-q), \dots, \\ (x-m, y), \dots, (x+n, y), \dots, \\ (x-m, y+p), \dots, (x, y+p), \dots, (x+n, y+p) \end{array} \right\}$$

O sea, los halos que hemos usado hasta ahora son de la forma  $H(x, y) = H_{1,1,1,1}(x, y)$ .

La figura 4 puede ayudar a entender estos halos generalizados.

**Figura 4.**  $H_{1,2,1,3}(0,0)$ .



**Rectas generales**

Con esta noción más amplia, podemos generalizar el concepto de recta en la GDT por medio de la siguiente definición. Dados dos puntos distintos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ , una recta en la GDT es un subconjunto  $L \subset M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : d((x, y), (x_1, y_1)) = d((x, y), (x_2, y_2))\}$ , con las siguientes características:

1. Existe una aplicación inyectiva o parametrización  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$  con  $\alpha(\mathbb{Z}) = L$ .
2. Para cada  $z \in \mathbb{Z}$ , existen  $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$  tales que:

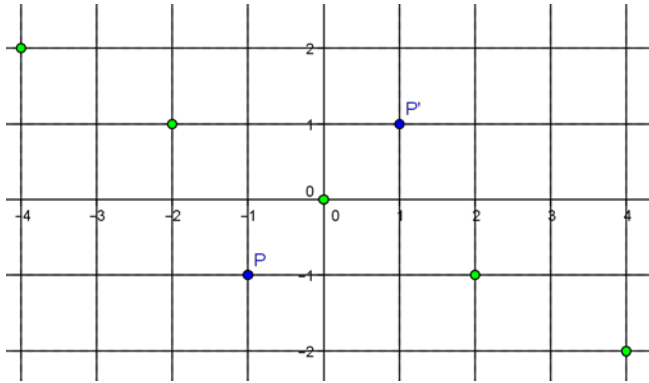
$$H_{n,m,p,q}(\alpha(z)) \cap L = \{\alpha(z-1), \alpha(z+1)\}.$$

De nuevo, son muchas las posibilidades de recta que resultan de esta definición general. Los halos determinan “pendientes locales” a la derecha y a la izquierda de cada punto de la línea recta. Cuando los halos son del tipo  $H_{1,1,1,1}(x, y)$ , se obtienen las rectas de la sección 3. Además de éstas, la nueva definición produce configuraciones nuevas; en algunos casos muy interesantes y casi inesperadas.

**Ecuaciones diofánticas lineales**

La figura 5 presenta la recta  $x + 2y = 0$ , que se obtiene con halos de la forma  $H_{2,2,1,1}(\alpha(z))$  alrededor de cada punto  $\alpha(z) = (-2z, z), z \in \mathbb{Z}$ .

**Figura 5.** La recta  $x = -2y$ .



Esta recta es un caso particular de las rectas que solucionan las ecuaciones diofánticas lineales  $ax + by = c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

Como es bien sabido, ellas tienen solución si y sólo si  $MCD(a, b) \mid c$  (el máximo común divisor de  $a$  y  $b$  divide a  $c$ ). En este caso, la ecuación diofántica lineal tiene infinitas soluciones  $\alpha(z) = (x(z), y(z))$ , con:

$$\begin{cases} x(z) = x_0 + (b/g)z \\ y(z) = y_0 - (a/g)z \end{cases}$$

Donde  $(x_0, y_0)$  es una solución particular de la ecuación,  $z \in \mathbb{Z}$  y  $g = MCD(a, b)$ ; cf: Jiménez, Gordillo y Rubiano (2004, p. 125). De esta manera, alrededor de cada punto de las rectas correspondientes se tiene un halo  $H_{n,m,p,q}(\alpha(z))$  con:

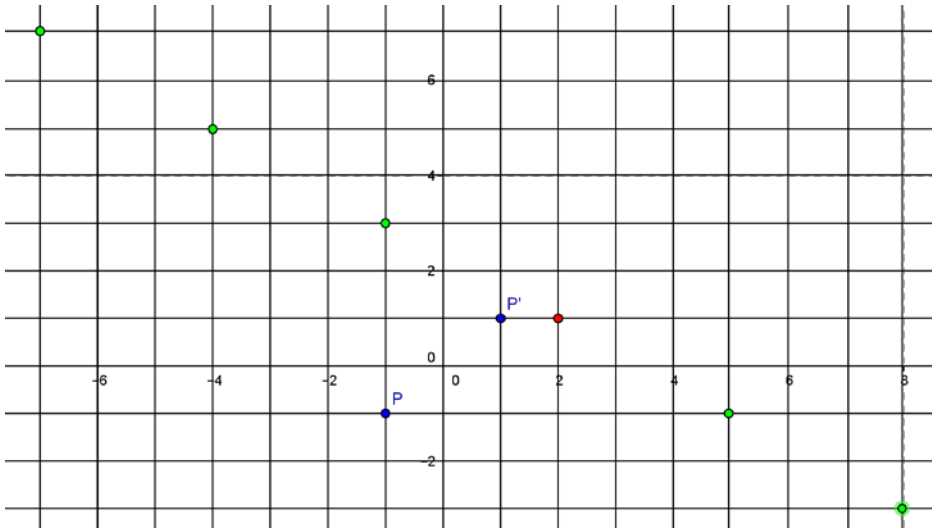
$$n = m = \left\lfloor \frac{b}{g} \right\rfloor, \quad p = q = \left\lfloor -\frac{a}{g} \right\rfloor.$$

Claro está, hay que tener el cuidado de excluir los puntos que no cumplan con la condición de equidistancia. Es decir, si  $S$  es el conjunto solución de la ecuación diofántica y  $M$  es una de las bisectrices de más arriba, la recta es  $L = S \cap M$ . En el caso de la recta  $x+2y=0$ , este paso no es evidente porque  $S \subset M$  y así,  $L=S$ .

A manera de ejemplo, grafiquemos la recta solución de  $6x+9y=21$

En primer lugar,  $MCD(6,9) = 3$ . Como  $3 \mid 21$ , el conjunto solución no es vacío. Por ensayo y error,  $(x_0, y_0) = (-7, 7)$ , entre otras posibilidades. De esta forma,  $x(z) = -7 + 3z$  y  $y(z) = 7 - 2z$ . Los halos son de la forma  $H_{3,3,2,2}(\alpha(z))$ . En la figura 6 se esboza la recta solución. El punto rojo queda por fuera del conjunto  $M$ , de los puntos equidistantes a  $P, P'$ .

**Figura 6.** La recta  $6x + 9y = 21$ .



Sin embargo, al aplicar la translación  $t_{-2,-1}$  a la recta de la figura 6, obtenemos otra recta totalmente contenida en  $M$ .

No hay que olvidar que estas rectas diofánticas constituyen sólo una parte de las rectas generales de la GDT. Para solucionar una ecuación de este tipo es útil, a menudo, ayudarse del grupo de isometrías de la GDT.

## 6. CONCLUSIONES

En primer lugar, se debe resaltar que la definición propuesta, que es completamente métrica, produjo algunas rectas —para la GDT— con propiedades algebraicas interesantes. Nos referimos concretamente al éxito obtenido al descubrir que hay rectas métricas que son soluciones de ecuaciones diofánticas. De esta manera, se cierra en algo la brecha entre la parte algebraica y la parte métrica de esa estructura doble que hemos llamado Geometría Discreta del Taxista. A pesar de esto, la compatibilidad

entre estas dos partes está muy lejos de ser la estrecha relación que se da en la Geometría Euclidiana.

También es importante señalar que las nociones de recta propuestas son lo suficientemente sencillas como para poderse acomodar a las necesidades de la enseñanza. Ciertamente, la definición se puede transponer a los aprendices de una manera muy sencilla:

*“Una recta en la GDT es un conjunto infinito de puntos vecinos que equidistan de dos puntos distintos dados. Los puntos se llaman vecinos porque el halo de cada punto de la recta contiene exactamente dos puntos, a saber: el predecesor y el sucesor de dicho punto. Los puntos de una recta están en correspondencia biunívoca con los números enteros”.*

Al escribir esta definición por primera vez, teníamos en mente los halos  $H_{1,1,1,1}(x, y)$ . Sin embargo, la definición sigue siendo válida para cualquier halo  $H_{n,m,p,q}(x, y)$ .

A propósito, ha sido sorprendente encontrar que la noción (aparente arbitraria) de halo se haya convertido en el ingrediente central para precisar una idea de dimensión útil para la geometría estudiada. No se esperaba tampoco, en un principio, que los halos permitieran interpretar las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales en dos variables como rectas de la Geometría Discreta del Taxista.

El precio que hay que pagar por estos resultados es la pérdida de muchos axiomas de la Geometría Euclidiana, a los cuales estamos acostumbrados. Entre otros, se pierden los axiomas de incidencia y de la paralela. El estudio del sistema axiomático resultante debe ser objeto de un estudio ulterior.

Por último y al fin de cuentas, ¿qué es una recta? Después de la experiencia vivida con la GDT, nos atrevemos a decir que una recta es una abstracción de la recta euclidiana y una idealización de una 1-variedad topológica que, en lo posible, debe tender un puente entre la parte métrica y la parte algebraica de la Geometría.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Este artículo ha sido financiado parcialmente por la Facultad de Ciencias de la Universidad del Tolima (UT) en Ibagué, Colombia. Y también parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt Regular No. 1140801 y Proyecto asociado al Convenio de Desempeño MECESUP (CD UCV-1203).

## REFERENCIAS

- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento*. Alemania: Editorial académica española.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage.
- Dawson, R. (February 2007). Crackpot Angle Bisectors! *Mathematics Magazine*. Washington, DC, 80(1), 59-64.
- Iny, D. (1984). Taxicab Geometry: Another Look at Conic Sections. *The Pi Mu Epsilon Journal*. Worcester, Massachusetts, 7(10), 645-647.
- Jiménez, L. R.; Gordillo, J. E. y Rubiano, G. N. (2004). *Teoría de números para principiantes*. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.
- Kocayusufoglu, I. & Özdamar, E. (1998). Isometries of Taxicab Geometry. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A1*, 47, 73-83.
- Krause, E. F. (1975). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications.
- Menger, K. (1952). You Will Like Geometry. *Guidebook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit*. Chicago, Illinois, Museum of Science and Industry.
- Minkowski, H. (1910). *Geometrie der Zahlen*. Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner.
- Munkres, J. R. (2000-1975). *Topology*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.
- Moser, J. M. & Kramer F. (1982). Lines and Parabolas in Taxicab Geometry. *The Pi Mu Epsilon Journal*. Worcester, Massachusetts, 7(7), 441-448.
- Phoebe Ho, Y. & Liu, Y. (1996). Parabolas in Taxicab Geometry. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*. University of Central Missouri, Warrensburg, 8(2).
- Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Atudents' Thinking in Linear Algebra*. J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.
- Reynolds, B. E. (1980). Taxicab Geometry. *The Pi Mu Epsilon Journal*. Worcester, Massachusetts, 7(2), 77-88.