

ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS QUE COMPONEN EL MATERIAL DE ESTUDIO EMPLEADO PARA LA FORMACIÓN EN LÓGICA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA

ANALYSIS OF THE PRAXEOLOGIES THAT MAKE UP THE STUDY MATERIAL USED FOR THE TRAINING IN MATHEMATICAL LOGIC OF MATHEMATICS TEACHING STUDENTS

Oscar Abel Cardona Hurtado

Universidad del Tolima – Institución Educativa Liceo Nacional
oach76@hotmail.com

Ana Rosa Corica

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) - Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología (NIECyT) Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA
acorica@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presentan resultados parciales de una investigación que gira en torno a la formación de profesores en lógica matemática. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El estudio se llevó a cabo en dos grupos en los que se orientó un mismo curso a estudiantes de un programa universitario en una institución colombiana. Resultados preliminares indican que los docentes encargados de formar estudiantes de profesorado en matemática emplean el mismo material, constituido por un libro de texto. En éste, el saber se presenta desfragmentado en teórico y práctico, donde el segundo no tendría incidencia en la constitución del primero.

Palabras clave: Formación de profesores, Lógica, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Libro de texto

Abstract

This paper presents partial results of an investigation that revolves around the training of teachers in mathematical logic. The Anthropological Theory of Didactics is adopted as a theoretical reference. The study was carried out in two groups in which two teachers guided the same course to students of a university program in a Colombian institution. Preliminary results indicate that the teachers in charged of training mathematics teacher students use the same material, consisting of a textbook. In this, knowledge is presented defragmented into theoretical and practical, where the second would have no impact on the constitution of the first.

Key words: Training of teachers, Logic, Anthropological Theory of Didactics, Textbook

Introducción

Existen técnicas que permiten hacer inferencias a partir de verdades conocidas. Sin embargo, el desconocimiento de estas por parte de la gran mayoría de los seres humanos conduce a la toma de decisiones con base en recursos alejados de la razón como hábitos o corazonadas. Asimismo, esta ignorancia en la materia contribuye a que en muchos casos se recurra a la autoridad para imponer los puntos

de vista (Copi y Cohen, 2013). La lógica es aquella ciencia que estudia las formas de razonamiento, con el objetivo de proporcionar técnicas que permitan establecer si un razonamiento es válido o no (Castillo y Pinta, 2015). En particular, la lógica matemática, y más específicamente el cálculo proposicional (en adelante CP) y el cálculo de predicados (en lo sucesivo CDP) posibilitan representar razonamientos simbólicamente y proporcionan maneras de realizar inferencias a partir de conjuntos de premisas.

Asimismo, el CP y el CDP juegan un papel fundamental en las demostraciones matemáticas. García-Martínez y Parraguez (2018) resaltan la relevancia de la implicación con cuantificadores en el razonamiento deductivo, y refieren dificultades de estudiantes universitarios en la comprensión de esta noción. También, Hamanaka, y Otaki (2020) destacan que la demostración matemática continúa siendo difícil de aprender para la mayoría de los estudiantes.

En la actualidad, la formación de docentes en matemática es una problemática que ha despertado el interés de diversos investigadores (Azcárate, 2004; Corica y Otero, 2016; Sierra, Bosch y Gascón, 2012). Sobre enseñanza de la lógica matemática, algunos investigadores se han ocupado de indagar a cerca del empleo de herramientas informáticas que sirvan de apoyo a los docentes (Huertas, Mor y Guerrero, 2010). Pero, no se han encontrado investigaciones centradas en a la formación de profesores en CP y CDP de manera específica. El objetivo central de este estudio es tomar conocimiento de las prácticas docentes relacionadas con enseñanza de CP y CDP, y proponer praxeologías superadoras para el estudio de la lógica en la formación de profesores de matemática. En este trabajo se reportan resultados parciales de un estudio relativo a la formación de profesores en lógica matemática.

Marco teórico

En este trabajo se adopta como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) propuesta por Yves Chevallard (1999). Esta perspectiva teórica se considera como una herramienta potente para describir la actividad docente (Corica y Otero, 2012), dado que considera como objeto de estudio e investigación didáctica todo el proceso que va desde la creación y la utilización del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes. Además, la TAD ubica la actividad matemática dentro de las actividades humanas y las instituciones sociales. El constructo teórico fundamental de la TAD es la noción de *praxeología, u organización matemática*, la que surge como respuesta a un conjunto de cuestiones, y consta de dos componentes: la *praxis* o del *saber hacer* y el *logos* o del *saber*. El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, se conforma de un conjunto de *tareas* que se

materializan en diferentes tipos de problemas, y de un conjunto de *técnicas* que se utilizan para llevar a cabo las *tareas* planteadas; y el nivel del *logos* o del *saber* en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la *técnica*, denominada *tecnología*; y en un segundo nivel, la fundamentación de la *tecnología*, denominada *teoría* y que asume respecto a la *tecnología* el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la *tecnología* respecto de la *técnica*.

Asimismo, Chevallard (1999), propuso la noción de *género de tareas*; un *género de tareas* no existe más que bajo la forma de diferentes *tipos de tareas*, caracterizadas por contar con un contenido estrechamente especificado. El concepto *tipos de tareas*, alude a un objeto relativamente preciso. Por ejemplo, *calcular* es un *género de tareas* que se va enriqueciendo con nuevos *tipos de tareas* a medida que se adelanta un proceso escolar. Un *tipo de tareas* inicial para un estudiante de secundaria podría ser, *calcular la suma de números enteros*; tipos de tareas posteriores, podrían ser *calcular la suma de números racionales* y *calcular la derivada de una función polinómica*.

Esta teoría distingue entre dos tipos de *praxeologías*: la Organización Matemática (OM) y la Organización Didáctica (OD). La primera se refiere a la realidad matemática a estudiar y la segunda, se refiere a la manera en que esto ocurre. Estos dos aspectos son inseparables; toda OM es generada por un estudio y a la vez, todo proceso de estudio, se realiza a partir de una OM en construcción.

En la TAD se clasifica las OM según las características de sus componentes. Se comprende a una OM como puntual (OMP), en una determinada institución, cuando es generada por un único tipo de tarea. La integración de diversas OMP en torno a un discurso tecnológico común en una institución, genera una praxeología local (OML). Mientras que una praxeología se denomina regional (OMR) en una institución, si es obtenida a partir de la coordinación, articulación e integración de diversas OML, en torno a una teoría común. Las OM globales son producto de la agregación de OMR. En particular, Fonseca (2004) establece las características que deben poseer las OM para poder integrarse en una OML, siendo que las instituciones de enseñanza

deberían, al menos procurar reconstruir una OML. En lo que concierne específicamente al producto del proceso de estudio, para su análisis se formularon ocho indicadores matemáticos de *completitud*. A continuación se sintetizan estos indicadores, siendo los siete primeros propuestos por Fonseca (2004) y el octavo por Lucas (2010): *OML1*. Integración de *tipos de tareas* y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico; *OML2*. Diferentes técnicas para cada *tipo de tareas* y criterios para elegir entre ellas; *OML3*. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas; *OML4*. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”; *OML5*. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas; *OML6*. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”; *OML7*. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica; *OML8*. La posibilidad de *perturbar* la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes permite ampliar y completar el proceso de estudio.

Metodología

El estudio que se propone es cualitativo, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). En esta investigación se procura comprender la práctica de profesores universitarios que orientan temas relacionados con el estudio de CP y al CDP en una universidad colombiana para la formación de estudiantes de profesorado. El estudio se llevó a cabo en dos grupos orientados por dos docentes que enseñan una misma asignatura en un mismo programa universitario de una institución, la cual incluye el estudio de nociones relativas a CP y CDP.

En concordancia con el referencial teórico adoptado, inicialmente se elaboró un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) relacionado con nociones de CP y al CDP. El MPR se emplea para analizar la Organización Matemática propuesta a enseñar (OMPE), la Organización Matemática efectivamente enseñada (OMEE) y para el diseño de un dispositivo didáctico (DD). La OMPE se reconstruye con base en los materiales propuestos por los docentes para el desarrollo de las clases. La OMEE se reconstruye con base en la información recogida en el proceso de observación no participante, que contempla: las versiones en audio de las clases, los registros

realizados por los profesores en el pizarrón, los materiales propuestos por los docentes y los apuntes de clase tomados por los estudiantes. Por último, a partir del MPR y los resultados obtenidos en todas las etapas de la investigación se diseñará un DD para el estudio del CP y el CDP en la universidad.

En este documento se presentan avances relacionados con la reconstrucción de la OMPE. La reconstrucción de esta OM se encuentra relacionada con la etapa de la transposición didáctica (Chevallard, 1997), según la cual el saber erudito requiere ser transformado y adaptado acorde a las necesidades de cada institución educativa. La OMPE en reconstrucción es producto del análisis del material utilizado por los dos docentes que enseñaron nociones de CP y CDP a estudiantes de una universidad colombiana que serán futuros profesores de matemática. Para describir la OMPE se utiliza la técnica de revisión de documentos (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). Para el desarrollo de las clases los docentes emplearon un mismo libro de texto.

Resultados

En relación con la reconstrucción de la OMPE, se analizó el libro de texto sugerido para el estudio por los dos profesores, que enseñaron nociones de CP y CDP, a los estudiantes de profesorado en matemática de la institución que participa de la investigación. Los dos docentes dirigieron el curso de manera autónoma y coincidieron en proponer el mismo libro de texto para desarrollar el curso. El texto lleva por título *Introducción a la lógica matemática*, reimpresso en 1975, cuyos autores son Patrick Suppes y Shirley Hill.

Se analizaron los ejemplares de tarea resueltos en el libro de texto, se examinaron los ejemplares de tarea propuestos para ser resueltos por los estudiantes y se resolvieron algunos de ellos considerados como representativos. En los dos casos se identificaron los *géneros de tarea* y los *tipos de tarea* a los que refieren las tareas; se describieron los conjuntos de acciones llevados a cabo para resolver cada tarea (técnicas); se distinguieron los elementos tecnológicos (*Bloque tecnológico-teórico*) utilizados; y se precisaron los *indicadores matemáticos de completitud* (IMC) propuestos por Fonseca (2004) y Lucas (2010) asociados a las tareas, los cuales permiten establecer

el *grado de completitud* de una OML. Para realizar este estudio se empleó una tabla de análisis de datos que se compone de las categorías que se indican en la *Tabla 1*. Se destaca que en la tercera columna se

exhibe la tarea particular a tratar y su solución, y en la sexta se precisa el número que especifica la tarea del libro de texto considerada.

Tabla 1. Categorías asociadas a tareas propuestas para resolver

Género de tarea	Tipo de tarea	Ejemplar y Resolución	Técnica	Bloque tecnológico-teórico	Ítem No.	IMC
-----------------	---------------	-----------------------	---------	----------------------------	----------	-----

Fuente: Elaboración propia

En la *Tabla 2*, que se presenta a continuación, se indica un ejemplo de tarea que ilustra la manera cómo se empleó la tabla de análisis de datos cuyas categorías se describen en la *Tabla 1*.

Tabla 2. Solución de ejemplar propuesto

Género de tarea	Tipo de tarea	Ejemplar y Resolución	Técnica	Bloque tecnológico-teórico	Ítem No.	IMC
Inferir	$T_{10}:T_{10}$: Inferir una conclusión a partir de un conjunto de premisas representadas simbólicamente	<p>Usar la Ley de silogismo disyuntivo (SD) para obtener una conclusión del siguiente conjunto de premisas.</p> <p>(1) $(R \ \& \ S) \vee T$ P</p> <p>(2) $(R \ \& \ S) \rightarrow \sim Q$ P</p> <p>(3) $T \rightarrow P$ P</p> <p>Solución:</p> <p>(4) $p \vee \sim Q$ SD 1,2,3</p>	Verificar relaciones entre las premisas y aplicar la regla de inferencia Ley de silogismo disyuntivo, con lo cual se obtiene una conclusión.	Proposición (θ_1) ley de silogismo disyuntivo (θ_{19})	$I_{C4}^{2,13}$	OML7

Fuente: Elaboración propia

El ejemplar resuelto mostrado en la *Tabla 2* alude al tipo de tareas *Inferir una conclusión a partir de un conjunto de premisas representadas simbólicamente*; la técnica utilizada para la resolución consiste en aplicar la regla de inferencia *ley de silogismo disyuntivo*; el entorno tecnológico-teórico usado se compone de las nociones *proposición* y *ley de silogismo disyuntivo*; y la tarea se vincula al indicador de completitud OML7 formulado por Fonseca (2004), puesto que se integran dos nociones que conforman el entorno tecnológico-teórico. Se evidencia que la solución de la tarea es muy simple, basta con aplicar la *ley de silogismo disyuntivo*, indicada en el enunciado de la tarea.

A partir de la confección de la *Tabla 1*, en la reconstrucción de la OMPE se identificaron *tipos de tareas* que corresponden a seis *géneros de tareas* que se indican y definen a continuación: las tareas correspondientes al *género representar*, hacen referencia a aquellas que demandan del uso

de símbolos para presentar enunciados; el *género construir*, incluye tareas que requieren del uso organizado de herramientas y reglas para concebir un propósito; el *género negar*, alude aseverar que una proposición no es cierta; *completar*, refiere a tareas que implican añadir componentes que le faltan a una proposición; y el *género relacionar*, engloba tareas que demandan establecer una relación entre dos proposiciones. En la *Figura 1*, se indica el número de tareas propuestas para ser resueltas según los diferentes *géneros*. El 46% de las tareas se asocian al género *representar* (GP3), el 41% refieren al género *identificar* (GP1), el 7% se asocian al género *construir* (GP2); además, las tareas *completar* (GP5), *relacionar* (GP6) y *negar* (GP4), cada una se asocia al 2%. Es decir, el 87% de las tareas del libro propuestas para ser resueltas corresponden a los géneros *representar* (GP3) o *identificar* (GP1); el 13% restante se distribuye entre los otros cuatro géneros de tarea.

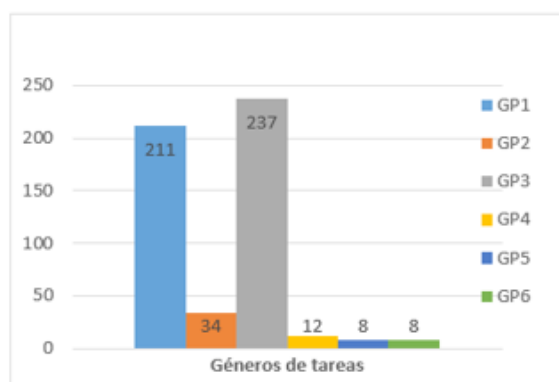


Figura 1. Géneros y cantidad de tareas propuestas para resolver
Fuente: Elaboración propia

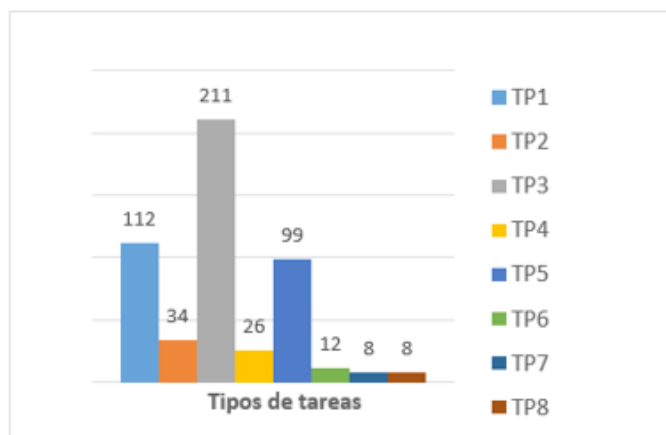


Figura 2. Tipos y cantidad de tareas propuestas para resolver
Fuente: Elaboración propia

Asimismo, en la *Figura 2* se puede apreciar el número de tareas propuestas para ser resueltas según los tipos de tarea identificados, los cuales se presentan enseguida: *TP1*: identificar las componentes de una proposición molecular; *TP2*: construir proposiciones; *TP3*: representar proposiciones simbólicamente; *TP4*: representar proposiciones en lenguaje común; *TP5*: identificar el término de enlace dominante en una proposición molecular; *TP6*: negar proposiciones; *TP7*: completar el espacio en blanco y *TP8*: relacionar enunciados de dos columnas.

El tipo de tareas más típico es *representar proposiciones simbólicamente (TP3)* con 211 tareas propuestas; en orden descendente, siguen los tipos de tareas *identificar las componentes de una proposición molecular (TP1)* e *identificar el término de enlace dominante en una proposición molecular (TP5)*, con 112 y 99 tareas propuestas respectivamente. En términos porcentuales, el 41% de los quehaceres se asocian al tipo de tareas *TP3*, el 22% se vinculan al tipo *TP1*, y el 19% se relacionan con el tipo de tareas *TP5*. Es decir, el 82% de las tareas propuestas para resolver se asocian a los tres tipos anteriores. En contraste, los cinco tipos de tareas restantes cuentan con una minoría de tareas propuestas para ser resueltas: 34 se asocian al tipo de tareas *construir proposiciones (TP2)*, 26 quehaceres se vinculan al tipo de tareas *representar proposiciones en lenguaje común (TP4)*, 12 tareas se relacionan con el tipo de tareas *negar proposiciones (TP6)*, y para el caso de los tipos de tareas *completar el espacio en blanco (TP7)*

y *relacionar enunciados de dos columnas (TP8)*, se proponen 8 tareas para cada uno. En otras palabras, solamente el 18% de los quehaceres propuestos para resolver se asocian a los tipos de tareas *TP2*, *TP4*, *TP6*, *TP7* y *TP8*.

Conclusiones

En este trabajo se exhiben resultados de una investigación de carácter cualitativo que está en desarrollo. El estudio refiere a la formación de profesores. Se pretende hacer un aporte en el nivel de educación superior, tomando conocimiento de las prácticas docentes de profesores universitarios que orientan temas relacionados con lógica proposicional y lógica de predicados a estudiantes para profesor de matemática, y proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de estos campos.

Resultados preliminares del estudio indican que en la presentación del libro de texto propuesto por los docentes se puede observar una desfragmentación del saber en teórico y práctico, bajo una concepción aplicacioncita primero se presenta el saber teórico y luego se proponen tareas para poder “observar” su funcionamiento. No hay instancias en las que del hacer de las tareas se estudie las limitaciones de las técnicas y de lugar a la elaboración de nuevos entornos tecnológicos –teórico. Además, para resolver las tareas propuestas en el libro de texto basta con aplicar las mismas técnicas que se utilizan en los ejemplares resueltos.

Referencias Bibliográficas

- Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Coord.), *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). La Coruña: Universidad de La Coruña.
- Castillo, E. & Pinta, M. (2015). *Lógica matemática I*. Ecuador: Ediciones UTMACH.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires : Aique.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.
- Copi, I. & Cohen, C. (2013). *Introducción a la lógica*. México: Limusa.
- Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de cálculo. *BOLEMA*, 26(42B), 459-482.
- Corica, A. & Otero, M. (2016). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *BOLEMA*, 30(55), 763-785.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.
- García-Martínez, I. & Parraguez, M. (2018). Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31(1), 349-357. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Hamanaka, H. & Otaki, K. (2020). Generating the raison d'être of logical concepts in mathematical activity at secondary school: Focusing on necessary/sufficient conditions. *Educacão Matemática Pesquisa*, 22(4), 438 – 453.
- Hernández, R.; Fernández, C. & Baptista. P. (2014). *Metodología de la Investigación*. 6° edición. Ciudad de México: Mc Graw-Hill Interamericana Editores.
- Huertas, M., Mor, E. & Guerrero, A. (2010). Herramienta de apoyo para el aprendizaje a distancia de la lógica en ingeniería informática. *Revista de educación a distancia*, Número especial, 1 -10.
- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.
- Sierra, T.; Bosch, M. & Gascón, J. (2012). La formación matemático – didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de “cómo enseñar a contar”. *Revista de Educación*. 357, 231-256.
- Suppes, P. & Hill, S. (1975). *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S.A. Cuauhtémoc, México.