ISSN: 2539-0686

Universidad del Tolima

ACREDITADA DE ALTA CALIDAD

¡Construimos la universidad que soñamos!

Instituto de Educación a Distancia

Revista Gestión & Finanzas

VOL. 7 ■ N° 13 ■ AÑO 2025

IBAGUÉ - TOLIMA

Estimación e interpretación del pronóstico ARMA con diferencia de logaritmos

Estimation and interpretation of the ARMA forecast with log-difference

Carlos Fernando Parra Moreno[13]

Resumen
En el artículo se analiza el uso de modelos ARMA (Auto-Regresivo de Media Móvil) con diferencia de logaritmos para pronosticar series temporales económicas, que pueden ser utilizados para variables macroeconómicas como el PIB o la inflación, o variables financieras como el índice de bolsa o una serie de retornos de una acción. La diferencia de logaritmos estabiliza series no estacionarias, transformando datos en tasas de crecimiento para cumplir con los supuestos de estacionariedad del modelo ARMA. El artículo destaca la interpretación de los coeficientes AR (dependencia de valores pasados) y MA (dependencia de errores pasados) para predecir tendencias económicas. Estos modelos subrayan la precisión para pronósticos a corto plazo, pero advierten sobre limitaciones en contextos de alta volatilidad. Se concluye que la diferencia de logaritmos mejora la robustez del modelo, siendo una herramienta clave para economistas y tomadores de decisiones en política económica y financieras.

Palabras clave: Autorregresión, Estacionariedad, Modelos Autorregresivos, Modelos ARMA.

Abstract
This article analyzes the use of ARMA (Autoregressive Moving Average) models with a difference of logarithms to forecast economic time series. These models can be used for macroeconomic variables such as GDP or inflation, or financial variables such as the stock market index or a series of stock returns. The difference of logarithms stabilizes non-stationary series, transforming data into growth rates to meet the stationarity assumptions of the ARMA model. The article highlights the interpretation of the AR (dependence on past values) and MA (dependence on past errors) coefficients for predicting economic trends. These models emphasize accuracy for short-term forecasts, but warn about limitations in highly volatile contexts. It is concluded that the difference of logarithms improves the robustness of the model, making it a key tool for economists and decision-makers in economic and financial policy.

Keywords: Autoregression, Stationarity, Autoregressive Models, ARMA Models.

Introducción
Una serie de tiempo es una secuencia de datos ordenados cronológicamente, recolectados a intervalos regulares o irregulares, que reflejan el comportamiento de una variable a lo largo

13. Doctor en Administración, Universidad de La Salle. Magíster en Administración, Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Economía, Universidad Externado de Colombia. Economista, Universidad de Ibagué, estudiante de Filosofía, UNAD. Docente titular, Universidad del Tolima, Instituto de Educación a Distancia (IDEAD), Colombia. cfparra@ut.edu.co . https://orcid.org/0000-0001-7995-0401

del tiempo. Estas series se utilizan en disciplinas como economía, meteorología o finanzas para analizar tendencias, estacionalidad o ciclos. Por ejemplo, el PIB trimestral de Colombia (2020-2024), el precio de la acción X, o la inflación mensual (de 2022 a 2024) son series de tiempo. Pueden ser estacionarias (con media y varianza constantes) o no estacionarias (con tendencias o estacionalidad). Su análisis, mediante modelos como ARMA, permite pronosticar valores futuros y entender patrones, siendo crucial para la toma de decisiones en política económica o planificación empresarial.

La estacionariedad en series temporales implica que las propiedades estadísticas de una serie, como la media, la varianza y la autocovarianza, permanecen constantes en el tiempo. Una serie estacionaria no muestra tendencias ni ciclos sistemáticos, lo que facilita su modelado y predicción, como en modelos AR, MA, ARMA y ARIMA. Las series no estacionarias presentan tendencias (crecimiento o decrecimiento), estacionalidad o varianza cambiante.

Los principales métodos para estacionarizar una serie de tiempo son: diferenciación (restar valores consecutivos), transformación logarítmica (reducir varianza), diferenciación estacional (eliminar patrones repetitivos), y descomposición (separar tendencia, estacionalidad y componente aleatorio). La diferenciación de logaritmos en una serie de tiempo consiste en aplicar el logaritmo natural a la serie y luego calcular la diferencia entre periodos consecutivos. Esta técnica se usa para estabilizar la varianza, facilitar la interpretación económica y transformar series no estacionarias en estacionarias, lo cual es útil en modelos como ARIMA o análisis macroeconómicos.
El rendimiento de una acción mide la ganancia o pérdida obtenida en un periodo. Se calcula comparando el precio de la acción al inicio y al final del periodo, considerando dividendos si los hay. El cálculo del rendimiento de una acción es fundamental para evaluar su rentabilidad, comparar inversiones y tomar decisiones financieras informadas. Permite medir el desempeño en el tiempo, analizar riesgos y proyectar ganancias futuras. Es clave en estrategias de inversión, valoración de activos y gestión de portafolios.

El rendimiento de una acción se modela comúnmente como una serie de tiempo, lo que permite analizar su comportamiento dinámico a lo largo del tiempo. Se pueden aplicar modelos estadísticos como ARIMA, GARCH o modelos de regresión para capturar patrones, tendencias y volatilidad. El modelo ARIMA se usa cuando los rendimientos muestran autocorrelación, mientras que GARCH es ideal para modelar varianza cambiante (volatilidad). Además, se pueden usar rendimientos logarítmicos por su estabilidad estadística. Estos modelos permiten prever comportamientos futuros, evaluar riesgos y optimizar decisiones de inversión en mercados financieros, considerando tanto datos históricos como variables externas relevantes.

El presente documento se divide en las siguientes secciones: la introducción; en la segunda parte, se explica que la estacionariedad de una serie de tiempo; en la tercera, se explica que es un modelo ARMA; en la cuarta, se da una amplia explicación de la diferenciación de logaritmos y los cuidados de este para realizar pronósticos; finalmente, se presentan las conclusiones.

La estacionariedad de las series de tiempo

Una serie estacionaria es una serie temporal cuyas propiedades estadísticas, como la media, la varianza y la autocovarianza, permanecen constantes a lo largo del tiempo (Peña, 2001). Esto implica que no presenta tendencias sistemáticas, estacionalidad ni cambios estructurales, lo que la hace predecible y adecuada para modelos como ARMA. Por ejemplo, la tasa de retorno diaria de un activo puede ser estacionaria si fluctúa alrededor de un valor constante. En contraste, una serie no estacionaria muestra tendencias (crecimiento o decrecimiento), estacionalidad o varianza variable. Ejemplos incluyen el PIB nominal, que crece con el tiempo debido a inflación o expansión económica, los precios de las acciones con tendencias alcistas, o las ventas minoristas con picos estacionales (como en junio o en navidad). Las series no estacionarias requieren transformaciones, como diferencias o logaritmos, para estabilizar sus propiedades y hacerlas aptas para análisis estadísticos. En contextos como la economía colombiana (2022-2024), series como la inflación (13.1% a 5.8%) suelen ser no estacionarias debido a tendencias inflacionarias.

Ejemplos de series no estacionarias incluyen:

- Precios de activos (acciones, divisas), que tienden a crecer o fluctuar con tendencias.
- PIB nominal, que aumenta con el tiempo debido a inflación o crecimiento económico.
- Consumo o ventas, con patrones estacionales (por ejemplo, alzas en diciembre).
- Índices de precios (IPC), que reflejan tendencias inflacionarias. Estas series requieren transformaciones, como diferencias o logaritmos, para volverse estacionarias.

Una serie estacionaria, con media y varianza constantes, es fundamental para la hipótesis de los mercados eficientes (HME). Esta sostiene que sostiene que los precios de los activos reflejan toda la información disponible, haciendo imposible obtener rendimientos superiores consistentemente (Parra, 2021). En un mercado eficiente, los precios siguen un paseo aleatorio, y sus retornos (diferencias logarítmicas) suelen ser estacionarios, mostrando fluctuaciones impredecibles alrededor de un promedio constante. Esto implica que no hay patrones predecibles en los retornos, alineándose con la HME en su forma débil, donde los precios pasados no predicen los futuros. Por ejemplo, en la economía colombiana, los retornos diarios de acciones en la Bolsa de Valores de Colombia podrían ser estacionarios, respaldando la idea de eficiencia de mercado al no mostrar tendencias sistemáticas explotables.

Los modelos ARMA (Autorregresivo de media móvil, AutoRegressive Moving Average)

Un modelo autorregresivo (AR) es un modelo estadístico utilizado en series temporales para predecir valores futuros basándose en sus propios valores pasados. En un modelo AR de orden p (AR(p)), el valor actual de la serie depende linealmente de p valores anteriores más un término de error aleatorio. Un ejemplo de un autorregresivo de orden uno (los datos presentes dependen del periodo inmediatamente anterior) sería AR(p=1):

$$X_t = c + \Phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde c= es una constante (media de la serie si es estacionaria), Φ es el coeficiente autorregresivo, X_{t-1} es el valor pasado de la serie y ε_t es el error. Requiere que la serie sea estacionaria para garantizar predicciones confiables, siendo común en economía para modelar variables como tasas de interés o inflación. Un modelo de media móvil (MA) es un método estadístico para series temporales donde el valor actual depende linealmente de errores aleatorios pasados y un término constante. Un ejemplo, de un MA(q=1) es:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2)$$

Donde, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ son los coeficientes de media móvil (q).

$\varepsilon_{t-1}, \ldots \varepsilon_{t-q}$ son los errores pasados.

Un modelo ARMA (AutoRegresivo de Media Móvil) es un modelo estadístico utilizado para analizar y pronosticar series temporales estacionarias. Combina dos componentes: el autoregresivo (AR), que modela la relación de la variable con sus valores pasados, y el de media móvil (MA), que considera errores pasados como predictores. Se denota como ARMA(p,q), donde p es el orden autoregresivo y q el de media móvil. Es útil en finanzas, economía y otros campos para capturar patrones temporales y generar pronósticos precisos, asumiendo estacionariedad en la serie. El modelo ARMA generalizado para varios periodos se representa por:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \, X_{t-1} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \, \varepsilon_{t-1} \quad (3)$$

La diferencia de logaritmos

En términos financieros, calcular la diferencia de logaritmos de una variable o activo, como el precio de una acción, representa la tasa de retorno logarítmica o rendimiento continuo entre dos períodos, es decir (P= precio del activo):

$$\Delta \ln(P_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (4)$$

Esta ecuación mide el cambio porcentual relativo en el precio, estabilizando la varianza y eliminando tendencias. Esta transformación facilita el análisis de series temporales en modelos como ARMA, ya que los retornos logarítmicos suelen ser más estacionarios y reflejan mejor la dinámica de los mercados financieros. Transformar una variable en diferencias de logaritmos para un modelo ARMA estabiliza la varianza y hace la serie estacionaria, requisitos clave para estos modelos. Los logaritmos reducen la escala de variaciones grandes, mientras que las diferencias eliminan tendencias, permitiendo modelar la dinámica subyacente. Esto mejora la precisión del modelo y facilita la interpretación, aunque los pronósticos requieren transformación inversa para volver a la escala original.

Sí se elabora un modelo ARMA utilizando datos en diferencias de logaritmos, el pronóstico que genera el modelo estará en la misma escala, es decir, en diferencias de logaritmos. Esto se debe a que el modelo ARMA se ajusta a la serie transformada (en este caso, las diferencias de los logaritmos de la serie original), y sus predicciones se expresan en esa misma unidad transformada. Sin embargo, para interpretar los resultados en la escala original de los datos, necesitarás realizar una transformación inversa. A continuación, te explico el proceso y las consideraciones clave:

- Primera: ¿Por qué el pronóstico está en diferencias de logaritmos? Cuando se aplica diferencias de logaritmos a una serie temporal (ecuación 4), se está transformando los datos para estabilizar la varianza (por los logaritmos) y eliminar tendencias (por las diferencias). El modelo ARMA se estima sobre esta serie transformada. Como resultado, las predicciones del modelo ARMA ($\Delta ln\widehat{P_t}$) representan los valores pronosticados de las diferencias de logaritmos, no de la serie original (P_t) ni de los logaritmos sin diferenciar $\ln(P_t)$.

- Segunda: ¿Cómo interpretar el pronóstico? El pronóstico en diferencias de logaritmos ($\Delta\ln(P_t)$ puede interpretarse como la tasa de crecimiento logarítmica aproximada de la serie original entre dos períodos consecutivos.

Para obtener el pronóstico en la escala original de los datos (P_t), se debe realizar la transformación inversa, que implica dos pasos:

1. Deshacer las diferencias: Suma el pronóstico de la diferencia de logaritmos ($\Delta ln\widehat{P_t}$) al último valor conocido del logaritmo ($\ln(P_{t-1})$:

$$ln\widehat{P_t} = \ln(P_{t-1}) + \Delta ln\widehat{P_t} \quad (5)$$

VOL. 7 / N°13 / 2025

2. Deshacer los logaritmos: Aplica la función exponencial para volver a la escala original:

$\widehat{P_t} = \exp(ln\widehat{P_t})$= exp $(\ln(P_{t-1})$ + $\Delta\ln(P_t)$ (6)

Si la serie original está en una unidad específica (por ejemplo, pesos, dólares, unidades físicas), el resultado final ($\hat{y}$t) estará en esa unidad.

- Tercero: Consideraciones prácticas

Acumulación para pronósticos a múltiples pasos: Si se está pronosticando varios períodos hacia adelante (por ejemplo, t+1, t+2,), se debe acumular las diferencias de logaritmos pronosticadas:

$$\ln(\hat{P}_{t+h}) = \ln(P_{t-1}) + \sum_{i=1}^{h} \Delta ln(\hat{P}_{t+i}) \quad (7)$$

Luego, se aplica la exponencial:

$$\hat{P}_{t+h} = \exp\text{^}(\ln(P_{t-1}) + \sum_{i=1}^{h} \Delta ln(\hat{P}_{t+i}) \quad (8)$$

Se debe tener cuidado con los sesgos. La transformación logarítmica introduce un sesgo al volver a la escala original, ya que E[exp(X)] ≠ exp(E[X]). Si necesitas pronósticos precisos en la escala original, podrías considerar ajustes como el sesgo de Jensen, que incorpora la varianza del pronóstico:

$$\widehat{P_t} = \exp\text{^}(ln\widehat{P_t} + \frac{\sigma^2}{2}) \quad (9)$$

donde σ^2 es la varianza del error del pronóstico.

Respecto a lo intervalos de confianza generados por el modelo ARMA también estarán en la escala de diferencias de logaritmos. Para transformarlos a la escala original, aplica la misma transformación inversa (suma de logaritmos y exponencial), pero se debe tener en cuenta que los intervalos no serán simétricos en la escala original debido a la no linealidad de la función exponencial.

- Cuarto: ¿Es obligatorio pronosticar en diferencias de logaritmos?

El modelo ARMA produce pronósticos directamente en la escala en la que fue estimado (diferencias de logaritmos). Sin embargo, en la práctica, los usuarios suelen estar interesados en los valores de la serie original (P_t). Por lo tanto, aunque el modelo genera pronósticos en diferencias de logaritmos, casi siempre se requiere transformar los resultados a la escala original para que sean interpretables.
Si no se transforman los pronósticos, estos solo serán útiles para analizar tasas de cambio logarítmicas, que pueden ser relevantes en contextos como finanzas (donde las diferencias de logaritmos aproximan rendimientos).

Ejemplo práctico

Suponga que modela una serie de precios (P_t) en diferencias de logaritmos ($\Delta ln(P_t)$ y el modelo ARMA predice:

$\Delta\ln(\widehat{P}_{t+1})$= 0.02 (un crecimiento logarítmico del 2%).

- El último valor conocido es P_t = 100, por lo que ln(P_t) = ln(100)≈4.605.

- Para obtener el pronóstico en la escala original:

$$\ln(\hat{P}_{t+i}) = 4.605 + 0.02 = 4.625$$
$$\hat{P}_{t+i} = e\text{^}(4.625) \approx 102.01$$

- El pronóstico en la escala original es un precio de aproximadamente 102.01.

Conclusiones

Modelar series de tiempo es crucial para analizar y predecir patrones en datos temporales, como el PIB, la inflación o precios de activos. Permite identificar tendencias, estacionalidad y ciclos, facilitando

decisiones en economía, finanzas y políticas públicas. Modelar ayuda a anticipar impactos económicos y diseñar estrategias monetarias, mejorando la planificación y la estabilidad económica.
Modelar series de tiempo con ARMA es clave para predecir variables económicas estacionarias, como tasas de retorno o inflación estabilizada, al capturar dependencias de valores y errores pasados. Es más utilizado en finanzas (rendimientos de acciones), economía (indicadores macroeconómicos) y meteorología, cuando las series no presentan tendencias ni estacionalidad marcadas.

Calcular diferencias de logaritmos en series de tiempo transforma series no estacionarias en estacionarias, estabilizando la varianza y eliminando tendencias. Esto es crucial para modelos ARMA, que requieren estacionariedad para predicciones precisas. El pronóstico de un modelo ARMA estimado en diferencias de logaritmos se genera en esa misma escala (diferencias de logaritmos). Sin embargo, para que los resultados sean útiles en la escala original de los datos, debes realizar la transformación inversa (sumar las diferencias y aplicar la exponencial). Es importante considerar el sesgo de la transformación logarítmica y los intervalos de confianza al interpretar los resultados. Este proceso es estándar en econometría y análisis de series temporales cuando se trabajan con datos transformados.

Referencias Bibliográficas

Box, G. E. P.; Jenkins, G. M.; Reinsel, G. C.; & Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis: Forecasting and control* (5th ed.). John Wiley & Sons.

Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to time series and forecasting* (3rd ed.). Springer.

Hamilton, J. D. (1994). *Análisis de series de tiempo*. Princeton University Press.

Parra Moreno, C. F. (2021). La hipótesis de los mercados eficientes, una revisión crítica. Revista Gestión Y Finanzas, 3(5). https://revistas.ut.edu.co/index.php/gestionyfinanzas/article/view/2576

Peña, D., Tiao, G. C., & Tsay, R. S. (2001). *A course in time series analysis*. Wiley.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of financial time series* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Universidad del Tolima

ACREDITADA DE ALTA CALIDAD

¡Construimos la universidad que soñamos!

Instituto de Educación a Distancia

@idead.ut @ideadUT

@idead_ut @idead.unitolima