El concepto de área:
acercamiento basado en las concepciones de estudiantes de educación básica

Milton Rodríguez Santos[1]
Danny Jovel Escobar[2]

Resumen. Teniendo en cuenta que los conocimientos —conscientes o inconscientes— relacionados con un concepto que posee el estudiante se denomina concepción (Artigue, 1990), este trabajo establece si los patrones y regularidades que se observan en los estudiantes de grado sexto de educación básica al clasificar figuras geométricas son de tipo cualitativo o cuantitativo, lo cual permite la identificación de la concepción de área que ellos poseen. Desde la teoría de formación de conceptos (González, 2011), se explica que todo concepto posee unos elementos (definiciones, representaciones, problemas, teorías y procedimientos), atributos (relevantes e irrelevantes) y clases de conocimiento asociado (formal, curricular y personal). Partiendo de la premisa de que las concepciones se manifiestan en la forma como se abordan y justifican problemas, procedimientos y demás afirmaciones relacionadas con el concepto, se adopta una metodología cualitativa que aplica un instrumento construido siguiendo las ideas de Chamorro (1994) sobre la construcción del concepto de magnitud. En las respuestas de los estudiantes se analizan las estrategias, razonamientos, habilidades (geométricas) y atributos por ellos manifestados alrededor del concepto de área.

Palabras clave: tipos de conocimientos, formación de conceptos y representaciones.

Abstract. Given that knowledge, conscious or unconscious-related with a concept that has the student is called conception (Artigue, 1990), this work establishes whether the patterns and regularities observed in the sixth grade students-basic education-, to classify geometric figures, are qualitative and/or quantitative, which allows identification of the concept of area they possess. From the theory of concept formation (González, 2011), explains that every concept has a few elements (definitions, representations, problems, theories and procedures), attributes (relevant and irrelevant) and associated knowledge classes (formal curriculum and staff). Starting from the premise that conceptions are manifested in the way problems are addressed and justified, procedures and other claims related to the concept,

[1]Magister en Educación. Profesor Institución Educativa El Jardín, Ibagué, Colombia. milrod33@yahoo.com, alergase@hotmail.com
[2]Magister en Educación. Profesor, Institución Educativa Técnica Francisco Julián Olaya, Rioblanco, Tolima, Colombia. danny9480@hotmail.com, cololaya@hotmail.com

we adopt a qualitative methodology that applies an instrument constructed following the ideas of Chamorro (1994) on the construction of concept of magnitude. The response of students examines the strategies, reasoning skills (geometric) and attributes manifested by them, around the concept of area.

Keywords: types of knowledge, concept formation, and representations.

Introducción

Regularmente, en la enseñanza existen diferencias entre aquello que se intenta enseñar y aquello que realmente aprende el estudiante. En general, el conjunto de ideas que un alumno se forma respecto de un concepto se denomina concepción. Las investigaciones (Vinner, 1991; Turégano, 2006) muestran que, cuando un estudiante resuelve problemas, en la mayoría de los casos, no utiliza la definición de los conceptos involucrados, sino que realmente evoca la concepción que tiene de ellos. Los autores del presente trabajo, en su experiencia como docentes, han observado en los estudiantes falencias en el pensamiento geométrico-métrico, particularmente en relación con el área. Sistemáticamente, han encontrado, por ejemplo, dificultad para calcular, comparar y estimar áreas, uso inadecuado de unidades de medidas y confusiones entre las concepciones de área y perímetro, lo cual sugiere la presencia de ideas inadecuadas en cuanto al concepto de área.

Para contribuir a comprender este problema, se estudia la concepción del concepto de área en los estudiantes, tomando como población de análisis el grado sexto de educación básica de un colegio oficial urbano de estrato dos de Ibagué, Colombia (Institución Educativa El Jardín).

Las teorías sobre formación de conceptos son clave para situarnos en una perspectiva distinta donde usualmente ha pervivido en el proceso enseñanza-aprendizaje la creencia de que el peso de un concepto está únicamente en su definición. Algunos autores, como Artigue (1990), aluden a otros elementos a tener en cuenta alrededor de este término, como por ejemplo las representaciones o los problemas que lo involucran (Tall y Vinner, 1981). Además evalúan la riqueza del término en cuanto sitúan la existencia de atributos o características que se le pueden imputar; en este mismo sentido, afirman que a un concepto se le pueden asociar diferentes tipos de conocimientos como el aceptado por la comunidad matemática y el de quien lo transforma para ser enseñado. González (2011) propone en llamar al conocimiento del aprendiz *conocimiento personal* toda vez que allí se manifiestan las concepciones. Van Hiele (1957) propone un modelo teórico que permite describir el desarrollo evolutivo del pensamiento geométrico en el individuo. Para tal caso, subyace un referente muy importante que contribuye a caracterizar el conocimiento personal, en particular, el relacionado con el concepto de área, que es objeto del presente estudio.

Se utiliza una metodología cualitativa en la que se parte de la premisa de que las concepciones se manifiestan en la forma como se abordan y justifican problemas, procedimientos y demás afirmaciones relacionadas con el concepto. Puesto que este trabajo busca específicamente establecer si al comparar figuras geométricas los estudiantes utilizan estrategias cuantitativas o cualitativas, siguiendo las ideas de Chamorro (1994) sobre el proceso de construcción de concepto de magnitud, se diseña un instrumento que plantea un problema no rutinario que muestra un conjunto de figuras poligonales, dadas sin medidas ni números ni algún orden particular (y sin sugerir nada), para que los estudiantes busquen atributos o características en ellas y establezcan clasificaciones de acuerdo con atributos encontrados. En las soluciones presentadas por los estudiantes se analiza la estrategia, el razonamiento y las habilidades utilizadas, así como los atributos relacionados con el concepto de área que, implícita o explícitamente, emplea el estudiante.

Elementos teóricos

Antecedentes

Chamorro (1995) estudia las dificultades y deficiencias presentes tanto en estudiantes como en docentes frente a la medida de magnitudes y destaca la creencia de los docentes de que, como casi todo el mundo sabe medir, entonces su enseñanza no ocasionará problemas, precisando que la medición es un tema difícil para los alumnos, los cuales en muchos casos al no comprenderla se limitan a memorizar o encontrar reglas mecánicas que les permitan resolver ejercicios. También señala que los docentes, generalmente por economía de tiempo y esfuerzo, evitan prácticas efectivas de medida en sus clases, limitándose al discurso teórico y subestimando el razonamiento empírico, y añade que las experiencias en medición son escasas en la vida cotidiana del estudiante y que corresponde a la escuela proporcionarlas.

Consciente de los conflictos implícitos en la adquisición del concepto de área, Turégano (1989) propone abordar su enseñanza que resaltan aspectos puramente cualitativos del concepto, es decir, sin medidas ni números. Explica que no se debe hablar de “área”, a secas, sino, más bien, de la relación “tener igual área que”, que define utilizando el concepto de *equidescomposición* (dos figuras tienen igual área si son equidescomponibles). A partir de esta relación desarrolla la teoría de áreas.

Por otro lado, para el caso colombiano, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), en sus *Lineamientos curriculares de matemática*, ha fijado pautas para el desarrollo del pensamiento métrico buscando evitar el empleo de estrategias prematuras de medición ligadas al número o a las fórmulas, la temprana algebrización de la medida, los tratamientos meramente instrumentales con aparatos sofisticados o complejos para el alumno, así como la reducción de equivalencias entre medidas a simples cálculos aritméticos. Su pretensión es que haya un acercamiento conceptual a la medida, que se comprenda el por qué y para qué medir, donde el alumno sea consciente de la necesidad de medir, de sus usos prácticos en la vida cotidiana y de su influencia en el desarrollo del mundo tanto científico como social.

Los docentes centran la enseñanza del área en “memorizar y manipular fórmulas” (Segovia, Castro y Flores, 1996), reflejando y motivando una concepción algorítmica y sin sentido del cálculo de áreas. Cabe agregar que D'Amore y Fandiño (2009), en una investigación de casi una década, encontraron que muchos docentes presentan grandes dificultades para conceptualizar el área, de lo cual concluyen que el “problema” no es solo local (concepto de área), sino global (formación de docentes).

Contrario a la generalizada algebrización del área (“formulismo”), Mántica, Götte y Dal Manso (2005), en un estudio donde plantearon a alumnos (12-13 años) situaciones problemáticas que inducían a medir superficies, encontraron que ellos (los estudiantes) no parecen necesitar fórmulas para calcular áreas, sino que implementan otras estrategias, como cuadricular la hoja y calcar cuadrados, mostrando facilidad para contar unidades cuadradas y mitades, y dificultándoseles el considerar otras fracciones.

Justificación

Turégano (1989) manifiesta que tanto desde el punto de vista psicológico y didáctico como teórico la aprehensión de cualquier concepto está mucho antes que su cuantificación. Así que la primera debe anteponerse a la segunda por representar un conocimiento esencial. Sin embargo, el área en su enseñanza ha sido vinculada prematuramente a la medida, que a su vez se ha reducido a números y, más aún, en la práctica no se mide concretamente, sino que se calcula a través de fórmulas (Turégano, 1996). En este sentido, Segovia, Castro y Flores (1996) reclaman prestar menos atención a memorizar y manipular fórmulas a cambio de que “se le preste más atención a otras prácticas sobre las áreas que redunden en una comprensión mayor de los conceptos y relaciones implicados en la medida de superficies” (p. 64).

Las inadecuadas prácticas mencionadas en la enseñanza traen como resultado que al terminar la educación elemental los estudiantes tengan, en palabras de Turégano (1996), una *imagen primitiva del área*, que generalmente está atada a una fórmula, lo cual les impide percibir la igualdad entre superficies que presentan diferente forma, así como determinar el área de superficies irregulares no típicas en la escuela. Esto sugiere que existen vacíos en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de área, por lo cual vale la pena preguntarnos ¿cuál es la concepción del concepto de área que tienen los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa El Jardín de Ibagué, Colombia?

Componentes de un concepto

Tall y Vinner (1981, citado por Jaime, 1995) distinguen el conocimiento de los matemáticos del conocimiento de quien lo aprende; este último lo denominan *imagen del concepto*. Artigue (citada por Azcárate, 1995) hace la misma distinción pero denomina concepción al concepto del aprendiz. Esto permite establecer diferencias entre el conocimiento del “matemático” y el conocimiento del estudiante. Basados en estas premisas, en este trabajo se considera que un concepto matemático tiene, al menos, tres tipos de *conocimiento asociado*, que se llamarán: *formal*, *curricular y personal*. Formal será el conocimiento aceptado por la comunidad matemática; curricular, el conocimiento formal transformado para ser enseñado; y personal, el conocimiento que de un concepto matemático posee una persona que lo aprende.

Artigue (citada por Azcárate, 1995) precisa que todo concepto posee unos elementos que son los que le dan vida y sentido al concepto; para este trabajo esos elementos serán: las definiciones, los problemas, las representaciones semióticas, la teoría y los procedimientos. Asimismo, Vinner (citado por Turégano, 2006) establece que los conceptos poseen atributos que permiten caracterizarlos, los cuales pueden ser relevantes e irrelevantes. Los atributos *relevantes* son aquellas propiedades que definen el concepto, es decir, que deben ser cumplidos por todos los ejemplos del concepto, mientras que los atributos *irrelevantes* son características que no poseen todos los ejemplos del concepto y que, al permitir diferenciar unos ejemplos de otros, sirven para hacer clasificaciones (forma, posición, tamaño, entre otras).

En el conocimiento de los estudiantes (conocimiento personal) se puede reconocer la presencia de atributos relevantes o irrelevantes cuando realizan, identifican o utilizan ejemplos y contraejemplos. Las definiciones personales, cuando existen, pueden contener atributos relevantes o irrelevantes, mientras que las definiciones formales solo contienen atributos relevantes.

Para ilustrar cambios en los tipos de conocimiento asociados a un concepto presentaremos una definición formal y una curricular del concepto de área, resaltando los cambios en los atributos.

Como definición formal está la de Apostol (1984), quien introduce el concepto de área como una función de conjunto[3] que cumple seis propiedades o axiomas (no negatividad, aditividad, diferencia, invariancia por congruencia, elección de escala y exhausión). Y como definición curricular citaremos a Gordillo (2006), quien en Ingenio Matemático 6 dice: “Una línea cerrada determina dos regiones, la interior y la exterior. La medida de la región interior es el área. Calcular el área es hallar la medida de la superficie encerrada por la frontera” (p. 134); en este texto escolar, el área es la medida de la región interior a una línea cerrada.

Nótese que el área como concepto formal es un concepto primitivo cuyos atributos se introducen mediante axiomas, dentro de los cuales hay conceptos, como el de función, sin embargo, el área como concepto curricular no es un concepto primitivo, sino definido mediante otros conceptos, como el de región del plano. En este caso, además de cambios en los atributos, también hay cambios en la naturaleza del concepto.

---

[3]Una función de conjunto es aquella que asigna a un conjunto un número real (Apóstol, 1984, p. 71).

Conocimiento personal de un concepto geométrico

Modelo de Van Hiele

El desarrollo del conocimiento geométrico en el estudiante se puede describir mediante el modelo de Van Hiele (Jaime, 1998), que es utilizado como referente teórico para propuestas curriculares de geometría. Este modelo tiene cinco niveles de razonamiento (figura 1) que formulan características generales sobre cómo evoluciona el razonamiento durante todo el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico. A continuación, se describen las características de las definiciones, clasificaciones y demostraciones para los niveles 1, 2 y 3.

Figura. 1. Niveles del modelo van hiele. (Fuente: los autores).

En el nivel 1 (reconocimiento), las definiciones incluyen atributos que no le pertenecen al concepto que se estudia; puede ocurrir que no se tengan definiciones o que ellas no incluyan atributos relevantes del concepto. En las clasificaciones, dos ejemplos pertenecen a una misma clase no tanto por compartir propiedades, sino más bien por tener en común características visuales, como por ejemplo: tamaño, posición o forma; en general, todas las clases son disyuntas. En cuanto a la demostración, no se siente la necesidad de justificar, probar o demostrar propiedades o conjeturas, porque todo es "evidente" (se ve en una gráfica, lo dice un libro o el profesor); las demostraciones no aparecen en este nivel porque implica considerar que es necesario hacerla, requiere reconocer propiedades, conceptos, y es imperioso establecer relaciones de implicación entre ellos, pero estas no son características de este nivel.

En el nivel 2 (análisis), a las definiciones les faltan atributos relevantes o incluyen atributos que se deducen de los relevantes. Sobre las clasificaciones, como en este nivel ya se reconocen componentes y propiedades, entonces dos ejemplos están en una misma clase por compartir componentes o propiedades; sin embargo, en general, las clases siguen siendo disyuntas. En este nivel, demostrar o probar una propiedad o conjetura se entiende que es comprobarla o verificarla en varios ejemplos[4].

En el nivel 3, en cuanto a las definiciones, el alumno entiende que una definición en matemáticas solo tiene atributos relevantes, las distingue y las utiliza correctamente; en cuanto a las clasificaciones, los alumnos pueden hacer clasificaciones bien sea disyuntas, con intersección o una completamente contenida en otra; en cuanto a las demostraciones o

[4]Consultar el resumen de las características por niveles de los procesos definir y demostrar en <http:// www.gpdmatematica.org.ar./publicaciones/internas_modelovanhiele.pdf>.

deducciones, puede encadenar información (datos de un problema, resultados conocidos, proposiciones matemáticas) para llegar a conclusiones, pero se le dificulta realizar y entender deducciones de cualquier cantidad de pasos con proposiciones matemáticas que involucren forma, posición, tamaño, entre otras, puesto que ellos están experimentando cambios tanto en el sistema escolar como en su desarrollo psicológico (están en transición del pensamiento concreto al pensamiento formal) (Piaget, 2001).

Habilidades geométricas

Hoffer (1990) plantea perfeccionar el modelo de Van Hiele introduciendo cinco habilidades geométricas (ver figura 2), que van cambiando sus características a medida que el alumno pasa de un nivel de razonamiento a otro.

Figura. 2. Habilidades geométricas de hoffer para el modelo de van hiele. (fuente: los autores).

La *habilidad visual* se relaciona con la capacidad para "sacar" información (por ejemplo, conceptos, elementos, relaciones entre elementos o conceptos, conjeturas y problemas), sobre los elementos de un concepto a partir de dibujos, gráficos o diagramas. La *habilidad de dibujo* está relacionada con la capacidad para "poner" (meter) información sobre un concepto por medio de dibujos, gráficos o diagramas; si es necesario, se pueden utilizar regla, compás, transportador o un *software* para geometría.

La *habilidad verbal* tiene que ver con la capacidad para hablar, leer y escribir con precisión sobre los componentes de un concepto, al momento de, por ejemplo, presentar la solución a un problema y responder objeciones de los compañeros o del profesor, al exponer un documento, al redactar una tarea o desarrollar una evaluación. *La habilidad lógica* se refiere a la capacidad de razonar, proceso que tiene que ver con "la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión" (MEN, 1998, p. 54); esta habilidad también incluye reconocer, expresar o discutir razonamientos, hablando, leyendo, escribiendo o dibujando. Finalmente, la *habilidad aplicada* está relacionada con la capacidad para reconocer conceptos (geométricos) en fenómenos físicos, sociales o situaciones cotidianas, representarlos mediante resultados de teorías matemáticas y estudiar estas representaciones (modelos matemáticos) para comprender mejor los fenómenos representados.

Metodología

Se empleó una metodología de investigación cualitativa, aplicando un estudio de caso con el fin de profundizar en el análisis de la información obtenida. La población de referencia elegida son los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa El Jardín de Ibagué, Colombia.

La institución es de carácter oficial, pertenece a la zona urbana y tiene tres sedes que atienden 2200 estudiantes. El bachillerato (grado sexto a undécimo) se ofrece en la sede central en la jornada de la mañana, donde se cuenta con 17 grupos que suman 700 alumnos y 24 docentes, de los cuales 4 son de matemáticas. La tasa de reprobación en bachillerato es del 20% y la deserción institucional es aproximadamente del 2%. El desempeño académico, según las Pruebas Saber 11º de 2010, tiene un promedio general para todas las áreas de 43,55 (sobre 100) que lo ubica en el nivel[5] medio en la clasificación del Icfes; para el caso de matemáticas el promedio fue de 47,03, lo cual ratifica este nivel. El resumen de los resultados de matemáticas se cita a continuación: por componente (aleatorio 52, geométrico-métrico 40 y variacional 46) y por competencia (comunicación 51, razonamiento 49 y resolución de problemas 44). Desde esta perspectiva, surgió la necesidad de empezar a realizar trabajos en educación matemática que subsanen vacíos existentes en los componentes, particularmente los relacionados con el componente geométrico-métrico. En general, los estudiantes de la institución pertenecen al estrato dos del nivel socioeconómico.

En grado sexto se cuenta con cinco grupos, cada uno de 45-50 estudiantes con edad promedio de 12 años. El curso elegido para el estudio tiene 48 alumnos, 23 hombres y 25 mujeres, y su director es uno de los autores del presente trabajo.

Instrumento

Chamorro (citado por Álvarez, 1996) indica que la construcción del concepto de una magnitud geométrica es un proceso que consta de cinco etapas:

- Partir de un conjunto de objetos;
- Identificar un atributo medible (es decir, cuantificable cuantitativa o cualitativamente);
- Definir clases de equivalencia por comparación de objetos (esto es, clasificar);
- Comparar las clases de equivalencia (no los objetos);
- Ordenar dichas clases.

Al analizar estas etapas, nos detuvimos en las tres primeras, de donde surgió la iniciativa de construir un instrumento, mostrando figuras geométricas para que los estudiantes las clasificaran a fin de establecer qué características elegían los jóvenes para clasificar dichas figuras.

[5] 0 a 30, 00 bajo.
30,01 a 70,00 medio.
Más de 70,01 alto.

En el instrumento se deseaba mostrar figuras que implícitamente sugirieran o facilitaran procesos de medición o de conteo. Se optó por construir polígonos sobre los puntos de un retículo 3 x 3, es decir, cada figura estaba circunscrita en un cuadrado de tres unidades de lado y su área era un número entero de un dígito respecto de la cuadrícula indicada. El instrumento final consta de 30 figuras, 29 polígonos cóncavos y 1 "poligonal hueca", distribuidas en 6 filas y 5 columnas. Explícitamente, en las figuras no aparecen números ni magnitudes, tampoco se incluye cuadrícula y todas se muestran sin un orden particular.

Se dio libertad para que el estudiante aplicara distintos tipos de conocimientos e instrumentos de medición, de acuerdo con su formación y capacidades; por ejemplo de pensamiento métrico, como reglas de medición o uso de unidades estándar o arbitrarias, de pensamiento geométrico, como las transformaciones geométricas y sus propiedades, y de pensamiento numérico, como el conteo, operaciones y relaciones con números naturales. De esta manera, se pretendía identificar los conocimientos y relaciones que el alumno empleaba en relación con el concepto de área.

La escogencia del cuestionario 1 para la realización de este trabajo se obtuvo mediante la elaboración y aplicación de un cuestionario piloto (anexo B). Una observación preliminar sobre los resultados del cuestionario 1 indicó que los estudiantes se inclinaban a clasificar por posición y forma; por ejemplo hablaban de "letras? y "figuras? (sin percatarse de que todas son figuras) y llamaban "iguales" a figuras que se obtenían por rotación de otra. Considerando prematuramente esto como "distractor", diseñamos el cuestionario piloto, pensando en eliminar del cuestionario 1 las figuras "iguales? por rotación y las figuras parecidas a letras; sin embargo, reflexionando sobre la riqueza de estrategias que había en este muestreo (cuestionario 1), decidimos analizar sus resultados. En algunos casos se realizó entrevista para aclarar la información aportada por el estudiante al cuestionario 1, el cual quedó finalmente para el análisis. El instrumento final se aplicó el 14 de marzo de 2011 en el bloque de clase de 6-8 am.

Análisis de resultados

Categorías de análisis

Las soluciones aportadas por los estudiantes giran en torno a la clasificación de las figuras allí mostradas. Teniendo en cuenta lo afirmado, se propuso cuatro categorías de análisis, a saber: estrategias, razonamientos, habilidades (geométricas) y atributos del área (ver figura 3).

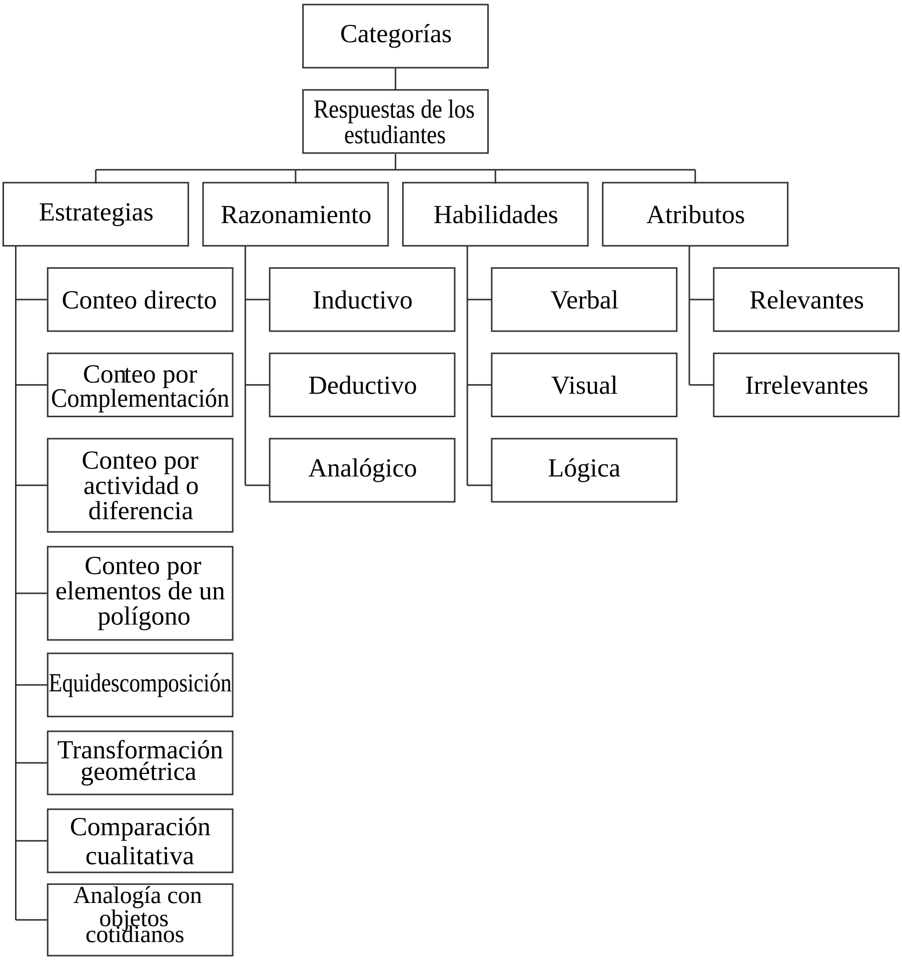


Figura. 3. Resumen de las categorias establecidas. (Fuente: los autores).

Estrategias

> Cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual, se denomina estrategia. Las estrategias comprenden el razonamiento y las destrezas, pero no se reducen a ellas. Las estrategias más usuales en los niveles de la educación obligatoria son: estimar, elaborar un modelo, construir un cuadro, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar. Unas son metodológicas y otras específicas (Rico, 1995, p. 18).

A continuación, se describen las estrategias que se deben tener en cuenta en este trabajo, que son las que podrían utilizar los alumnos:

- *Por conteo directo*: cuando se cuentan la cantidad de cuadritos interiores a la figura.
- *Conteo por complementación*: cuando se cuentan la cantidad de cuadritos exteriores a la figura, pero dentro del cuadrado que las circunscribe.
- *Equidescomposición*: podrán compararse aquellas figuras donde una pueda obtenerse a partir de otra mediante reorganización de las cuadrículas que la forman.
- *Transformación geométrica*: las figuras se pueden clasificar por comparación con otra que permita obtenerla por medio de una transformación rígida.
- *Conteo por aditividad o diferencia*: es posible comparar figuras determinando cuántas cuadrículas "le sobran" o "le faltan" para ser congruente con otra tomada como referencia.
- *Conteo de elementos de un polígono*: las figuras pueden clasificarse a partir del conteo de elementos del polígono, tales como vértices o ángulos.
- *Comparación cualitativa*: las figuras se pueden clasificar utilizando adjetivos comparativos, tales como grande, pequeño, gorda, flaca, delgada, gruesa.
- *Analogía con objetos cotidianos*: entre estos objetos tenemos letras, números, escaleras, herraduras, ganchos, tetris, entre otros.

Razonamiento

> La capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto se expresa mediante una secuencia argumentativa: la que solemos llamar razonamiento. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. En el trabajo con alumnos de educación básica, un razonamiento será todo argumento suficientemente fundado que dé razón o justifique una propiedad o relación. En matemáticas, además del razonamiento deductivo[6], se emplean el razonamiento inductivo[7] y el analógico[8] (Rico, 1995, p. 17).

El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas, mientras que el razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión

[6]El razonamiento deductivo es aquel que se deduce directamente de unas premisas y que, por lo tanto, siempre resulta verdadera la conclusión obtenida. Es un razonamiento utilizado en matemáticas y está regido por las leyes de la lógica matemática.
[7]El razonamiento inductivo es un razonamiento no deductivo, donde se obtiene la conclusión a partir de la observación repetida de una propiedad, generalizando su cumplimiento. Por ejemplo, si llegamos a una ciudad y al llegar observamos solo habitantes indígenas, entonces podríamos concluir que todos sus habitantes son indígenas. Otro ejemplo sería tomar las proposiciones P1: Ana, Luis y Pedro son hijos de Jorge; P2: Ana es rubia; P3: Luis es rubio; P4: Pedro es rubio, y por razonamiento inductivo concluir que todos los hijos de Jorge son rubios.
[8]El razonamiento analógico es un razonamiento no deductivo donde se obtienen conclusiones particulares (no siempre verdaderas) al comparar un fenómeno o propiedad con otra ya conocida. Por ejemplo, si la Tierra está poblada por seres vivientes y Marte tiene condiciones similares a la Tierra, entonces Marte deberá estar poblada por seres vivos.

> que está apoyada por unas premisas. El razonamiento inductivo es un proceso que parte de sucesos y busca la generalidad de los hechos que acontecen. Un razonamiento inductivo se considera fuerte si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas. En este sentido se dice que el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión. En este mismo sentido el razonamiento apunta no solo a lo argumentativo, sino también a lo demostrativo (deductivo-inductivo) y al silogismo (Duval, 1999).

El razonamiento analógico es una estrategia conceptual que capacita a los niños a hacer inferencia acerca de fenómenos nuevos, a transferir aprendizajes entre contextos y a extraer información relevante de las experiencias de aprendizaje cotidiano basados en la similaridad relacional (Goswami, 2001).

Desde esta perspectiva, se precisa que las representaciones mentales cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto. Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas (Duval, 1999).

Habilidades. Están referidas a las planteadas por Hoffer (1990) para el pensamiento geométrico. Para este estudio, no consideraremos la habilidad aplicada por cuanto exige el conocimiento a fondo de la modelación de conceptos geométricos en fenómenos físicos, sociales o situaciones cotidianas, representarlos mediante resultados de teorías matemáticas y estudiar estas representaciones para comprender mejor los fenómenos representados, por lo cual decidimos rastrear las habilidades visual, verbal, de dibujo y lógica.

Atributos. Son aquellos atributos observados por el estudiante que, de acuerdo con Tall y Vinner (1981), se hacen relevantes o irrelevantes para los estudiantes alrededor del concepto de área. Los atributos relevantes fueron tomados de la definición formal de Apostol (1984), a saber: función de conjunto, no negatividad, aditividad, diferencia, invariancia por congruencia, elección de escala. En cuanto a los atributos irrelevantes fueron tenidos en cuenta, entre otros, forma, posición y tamaño.

Presentación de resultados

Para realizar el análisis se seleccionaron tres estudiantes, y las respuestas de ellos, representadas a partir de figuras, se agruparon en cuatro conjuntos, conforme a una clasificación de referencia.

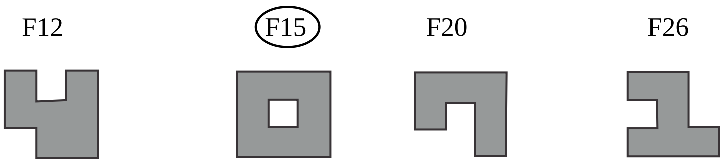
Los estudiantes se eligieron de la siguiente manera: teniendo en cuenta la caracterización por parte del profesor del curso, primero los escolares se distribuyeron en tres grupos (A, B y C) de acuerdo con sus actitudes y aptitudes hacia las matemáticas. En el grupo A se ubicaron los alumnos más avanzados y con actitud positiva hacia las matemáticas; en el grupo B, aquellos con dificultades e indiferencia hacia las matemáticas; y en el grupo C, los que mostraban actitud negativa o apatía hacia las matemáticas. Posteriormente, de cada grupo (A, B y C), se seleccionó un alumno, el que consideramos que aportaba más información al análisis dentro de este universo representado allí, porque recogía toda la riqueza de las otras clasificaciones con relación al resto del grupo, ya que este representativo permitía explicitar y visibilizar la información que se requería para el análisis de la población estudio, además por la variedad de procesos utilizados, en comparación con los demás compañeros seleccionados en el mismo grupo.

Por otra parte, las figuras se agruparon en conjuntos de figuras equivalentes (de igual área), de acuerdo con la estrategia de conteo por complementación (“casillas que le faltan” a la figura para ser congruente con el cuadrado que la contiene). En esta clasificación de referencia, se obtuvieron cuatro conjuntos: I, II, III y IV (ver anexo C). El conjunto I recolecta las figuras que les “falta” un cuadrito; situación análoga ocurre con los demás conjuntos.

Resultados

Estudiante A

El estudiante A estableció distintos criterios de clasificación construyendo distintos subconjuntos. Frente al conjunto I, que internamente se estableció para el análisis, él no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, la figura 15 la asocia con las figuras 12, 20 y 26:



- *Estrategia. Analogía con objetos cotidianos*, ya que hace un paralelo entre estas figuras y otras que le son familiares, en este caso, los números.

- *Razonamiento. Analogía*, y puede escribirse de la siguiente forma: la figura 12 es como un 4, la figura 15 es como un 0, la figura 20 es como un 7 y la figura 26 es como un 1.

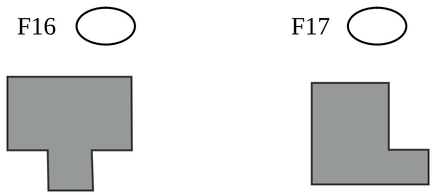
- *·Habilidad. Visual*, que le permite hacer correspondencia entre objetos geométricos y objetos de la vida real, y lógica porque encuentra similitudes para luego relacionar unos números con unas figuras.

Atributos del área:

relevantes: no se observa que identifique atributos relevantes para el área.

irrelevantes: presta atención a la forma como criterio de comparación.

El estudiante A, frente al conjunto II que internamente se estableció para el análisis, no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, estableció un subconjunto con las figuras 16 y 17:



- Estrategia. El estudiante aplica equidescomposición, ya que simula un movimiento geométrico de estas características al trasladar el cuadrado inferior del centro de la figura 16 hacia su extremo izquierdo para transformarla en la figura 17.

- Razonamiento. Es de tipo deductivo y se puede describir de la siguiente forma: si traslado el cuadrado inferior de la figura 16, entonces obtengo la figura 17.

- Destreza. Se observa habilidades visual y lógica, ya que extrae información de las figuras en cuestión y es capaz de ordenar esas ideas para llegar a una conclusión.

Atributos:

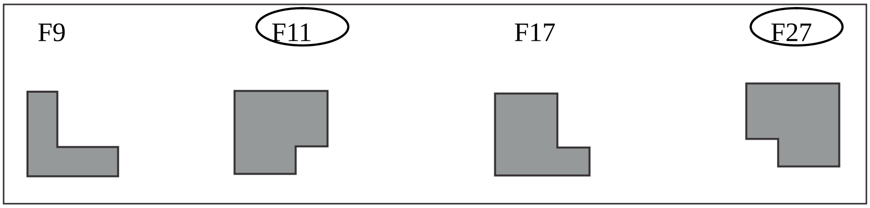
relevantes: para el área identifica la propiedad de aditividad y de diferencia puesto que extrae una fracción de la figura y la traslada (agregándola) a otra sección para obtener la otra figura. Reconoce que el segmento al ser trasladado no cambia su “tamaño” aludiendo de esta forma a la invariancia por congruencia.

irrelevantes: el estudiante entiende que tener la misma forma y distinta posición no altera el tamaño.

Como se puede notar el estudiante reconoce la propiedad de la aditividad cuando dice “son rectángulos con un cuadrado salido” (figuras 16 y 17). En este caso, él está reconociendo que cada una de estas figuras se obtiene a partir de un “rectángulo” al cual se le agrega un “cuadrado”; la aditividad se precisa cuando dice que esta “salido”, dando a entender que al cuadrado se le debe agregar al rectángulo.

Estudiante B

El estudiante B frente al conjunto I que internamente se estableció para el análisis no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, estableció un subconjunto con las figuras 11 y 27:



- Estrategia. Analogía con objetos cotidianos, ya que compara las figuras con letras.

- Razonamiento. Analogía, y puede escribirse de la siguiente manera: tanto la figura 9, como la figuras 11, 17 y 27 parecen una L, por lo tanto, agrupó las cuatro figuras en mención en un mismo conjunto.

- Habilidad. Visual, porque extrae información de la figura (forma) para relacionarla con “objetos” conocidos y lógica manifestada cuando procura aclarar que no solo parecen L, sino que, además, aclara que están en diferentes posiciones.

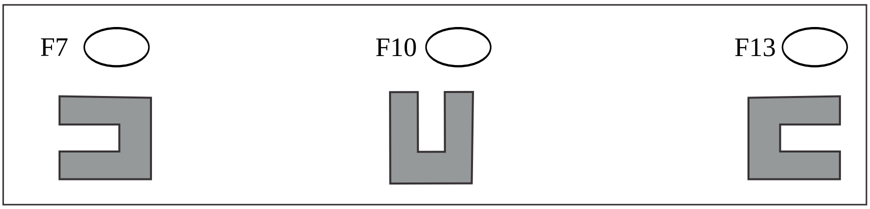
Atributos del área:

Relevantes: reconoce la invariancia por congruencia cuando dice que en este grupo de figuras “boca arriba y boca abajo”; además, cuando dice “gordas” está proponiendo una cuantificación, la cual se aproxima a la propiedad de elección de escala, axioma que introduce la medición.

Atributos irrelevantes: Resalta forma y posición para comparar las figuras.

Él reconoce en su clasificación la propiedad de la congruencia, hecho que se puede evidenciar cuando usa los términos “tienen la misma medida y forma” (figuras 11 y 27), lo cual muestra que el estudiante reconoce la propiedad en mención, pese a que las figuras estén rotadas entre sí.

El estudiante B frente al conjunto II que internamente se estableció para el análisis incluyó todas sus figuras en esta agrupación, y estableció un subconjunto con las figuras 7, 10 y 13:



- Estrategia. Analogía con objetos cotidianos, ya que encuentra un parecido entre estas figuras y las de su entorno, en particular, con las herraduras.

- Razonamiento. Su razonamiento es por analogía y puede escribirse así: como algunas de las figuras mostradas tienen forma de U y como la U tiene forma de herradura, entonces las figuras aquí mostradas tienen forma de herradura. A partir de esta categoría, se puede entrever un acercamiento del estudiante hacia la propiedad transitiva, dándose la posibilidad de mirarlo como deducción.

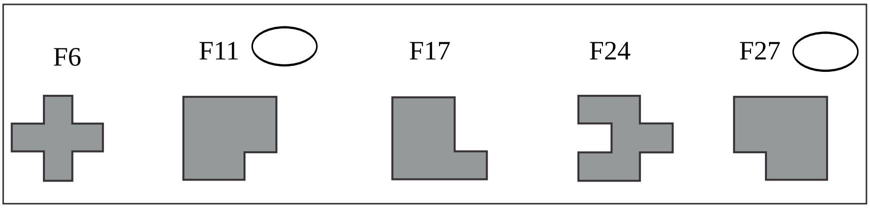
- Destrezas. Habilidad visual, ya que extrae lo que le interesa de la figura, en este caso la forma para luego compararla con otros objetos y lógica en cuanto es capaz de ir encadenando ideas para llegar a una conclusión.

Atributos:

relevantes: reconoce que una transformación geométrica como la rotación y la reflexión no alteran la forma de las figuras, lo cual está íntimamente relacionado con la invariancia por congruencia para el área.

Estudiante C

La estudiante C estableció distintos criterios de clasificación construyendo distintos subconjuntos. Frente al conjunto I que internamente se estableció para el análisis, ella no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, la figura 11 y 27 la asoció con las figuras 6, 17 y 24:



- Estrategia. Comparación cualitativa, que se evidencia porque observa que la figura está formada por ciertas secciones (porciones) y de esta manera compara las diferentes figuras.

- Razonamiento. Deducción, que puede escribirse así: la estudiante construyó y denotó su conjunto como G. Frente al conjunto I que internamente se estableció para el análisis, incluyó solamente las figuras 11 y 27, asoció las figuras en mención en dos grupos diferentes: las figuras 6, 11 contra las 17, 24 y 27; comparó las figuras 6, 11, deduciendo que tienen secciones superiores diferentes, así como las figuras 6 y 17; igual ocurre con las figuras 11 y 24; por lo tanto, generalizó que todas las figuras del conjunto tienen secciones distintas (“lados desiguales”).

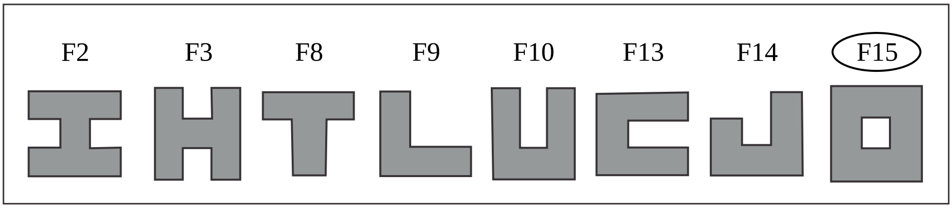
- Habilidad. Visual y lógica, ya que superpone mentalmente figuras comparando secciones de ella y es capaz de ordenar esas ideas para llegar a una conclusión.

Atributo del área:

atributos relevantes: identifica la aditividad, ya que extrae una sección de la figura para compararla con otras figuras.

atributos irrelevantes: forma.

La estudiante C frente al conjunto II que internamente se estableció para el análisis no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, estableció un subconjunto con las figuras 15, asociándola con las figuras 2, 3, 8, 9, 10, 13 y 14:



· Estrategia. Analogía con objetos cotidianos, ya que estableció un paralelo de estas figuras con las letras del abecedario las cuales le resultan familiares.

· Razonamiento. Analogía, que se puede resumir en los siguientes términos: la figura 2 es una I, la figura 3 es una H, la figura 8 es una T, la figura 9 es una L; y…

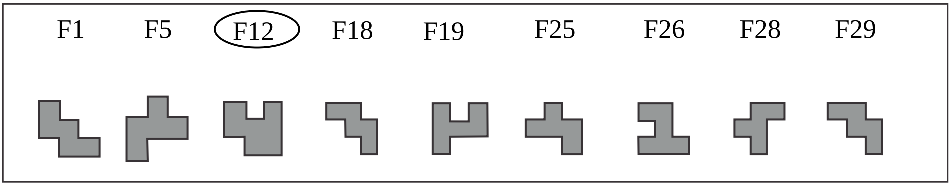
· Habilidad. Visual, que le permite hacer correspondencia entre objetos geométricos y otros.

Atributos del área:

atributos relevantes: no se evidencia su uso en este caso.

atributos irrelevantes: usa la forma para comparar y organizar las figuras.

La estudiante C frente al conjunto III que internamente se estableció para el análisis no incluyó todas sus figuras en esta agrupación, sino que, por ejemplo, la figura 12 la asoció con las figuras 1, 5, 18, 19, 25, 26, 28 y 29:



· Estrategia. La estudiante utilizó conteo de elementos de un polígono, dado que cuenta todas las figuras que tienen 10 lados para luego agruparlas, y halló una correspondencia entre figuras geométricas y números.

- Razonamiento. Es de tipo analógico, y se puede resumir en los siguientes términos: conformó grupos con todas aquellas figuras que tienen el mismo número de lados, por ejemplo, todas aquellas que tienen 10 lados, entre las que se tienen las figuras 1, 5 12, 18, 19, 25, 26, 28 y 29.

- Destreza. Su habilidad visual le permite establecer una correspondencia entre objetos geométricos y números, y con su habilidad lógica encuentra similitudes para luego relacionar un número con unas figuras.

Atributos:

relevantes: alude a la elección de escala en cuanto se percata de que al superponer mentalmente una figura sobre otra puede cuantificar tamaños.

irrelevantes: el estudiante presta atención a la forma como criterio de comparación para organizar las figuras.

Conclusiones

En general, los estudiantes no incluyeron todas las figuras en una misma colección, sino que distribuyeron sus elementos agregándolos a distintas agrupaciones o subconjuntos que conformaron de acuerdo con el criterio personal.

En cuanto a patrones y regularidades detectados, se observa que en la equidescomposición encuentran un método para hallar figuras equivalentes y en las transformaciones geométricas reconocen la propiedad de no alterar el área. Otros intentos tendientes al concepto de área, pero más rudimentarios, fue la comparación a través de adjetivos como gordas-delgadas. Asimismo, con la analogía con objetos cotidianos los estudiantes también esperaban encontrar características similares comparando las figuras con otros objetos conocidos (por ejemplo, números). Es poco común el uso de estrategias cuantitativas. Sin embargo, entre ellas, se encontraron conteos donde se comparaba una figura con otra fija determinando el número de cuadrículas excedentes o sobrantes ("son un rectángulo con un cuadrado salido"); además la "poligonalidad" de las figuras sugirió la idea de contar los elementos del polígono correspondiente. Estos casos constituyen tentativas por trascender las cualidades, asociándoles números a ciertas características de las figuras.

En las clasificaciones de los estudiantes predomina el razonamiento por analogía, que indican que para construir sus argumentos se apoyan en situaciones conocidas, generalmente de su cotidianidad. El razonamiento deductivo, usual en matemáticas, no es común en los alumnos analizados.

Los alumnos aplican principalmente la habilidad visual, que les permite extraer información de las representaciones gráficas. También, en menor medida, muestran su habilidad lógica, que les facilita ordenar sus ideas para elaborar un razonamiento.

Los alumnos, con sus palabras, reconocen atributos del área. Entre los relevantes, aparecen la función de conjunto, la no negatividad, la aditividad, la diferencia e invariancia por congruencia. Sin embargo, en la prueba no se observó el atributo de exhaución. Como atributos irrelevantes reconocen la forma y posición de las figuras.

- Respecto de la concepción de área de los estudiantes pertenecientes a la muestra analizada, se puede concluir que:
- Al determinar características de figuras tienden a fijarse en aspectos cualitativos más que cuantitativos.
- Sus acercamientos al concepto de área son de tipo cualitativo (gorda, flaca).
- Reconocen que las transformaciones geométricas, como rotación y traslación, generan figuras congruentes y, por ende, de igual área.
- Identifican la equidescomposición como método para comparar área.
- El cálculo directo del área no es usual.
- En sus mediciones, ni el área ni la longitud son de uso común; más que medir prefieren contar.

En general, de los estudiantes de la muestra se puede decir que:

- Al utilizar definiciones incluyen atributos que no le pertenecen al concepto o no incluyen atributos relevantes del concepto, e incluso que no tengan definiciones; se inclinan por términos del lenguaje común más que por el lenguaje propio de las matemáticas.
- Clasifican varios ejemplos en una misma clase no tanto por compartir propiedades geométricas, sino más bien por tener en común características visuales (por ejemplo, tamaño, posición o forma).
- No sienten la necesidad de justificar, probar o demostrar propiedades o conjeturas porque todo es “evidente” (se ve en el dibujo, lo dice un libro o el profesor).
- En problemas no rutinarios, los estudiantes reconocen con sus palabras atributos que son relevantes para el área.
- Frecuentemente, identifican atributos que para la concepción de área pueden ser irrelevantes.

Utilizan estrategias de clasificación, predominantemente cualitativas.

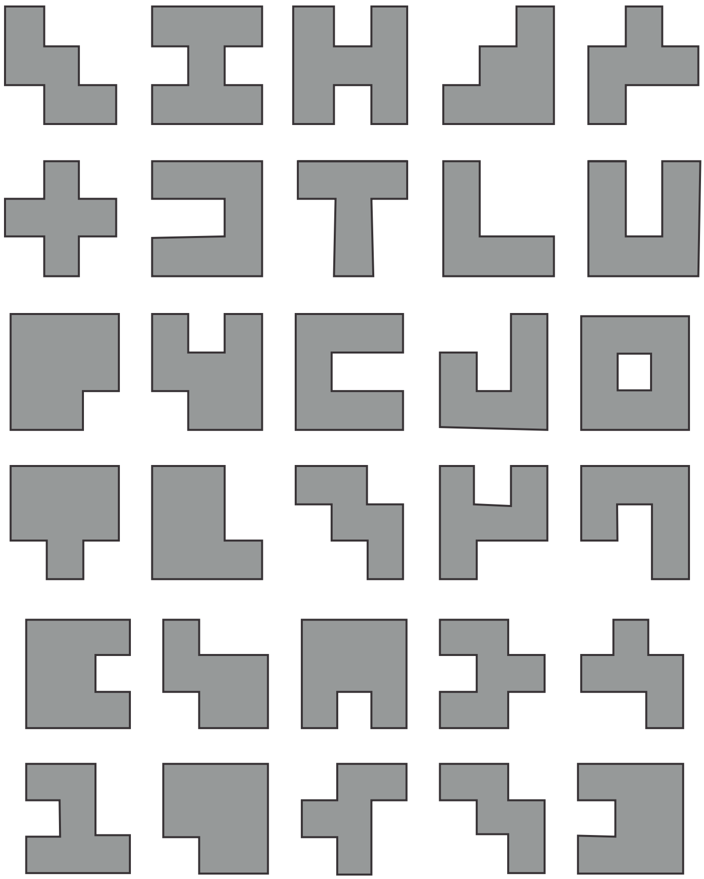
- A partir de las estrategias adoptadas por los estudiantes, se puede afirmar con seguridad que ellos parecen sentirse más cómodos o seguros utilizando estrategias de clasificación cualitativas frente al concepto de área, hecho que contrasta la teoría con la realidad. Por lo tanto, se sugiere a partir de este estudio la importancia de que en la enseñanza del concepto matemático de área en estudiantes de grado sexto de educación básica se empleen secuencialmente guías didácticas que contengan estrategias cualitativas, las cuales le permitan al estudiante encontrar por iniciativa propia patrones y regularidades para llegar a comprender la naturaleza de este concepto, contribuyendo a su formación adecuada, y evitándose de esta manera la aritmetización y el uso prematuro e inadecuado de fórmulas.

Anexos

Anexo A. Cuestionario final aplicado

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
CUESTIONARIO 1
Nombres:_________________________ Fecha:____________ Grado________
Lee la siguiente actividad, sigue atentamente las instrucciones dadas:

1. A continuación te presentamos un conjunto de figuras. Obsérvalas.
2. Piensa en una característica que puedas medir. Escríbela.
3. Identifica las figuras que tengan la misma característica elegida. Píntalas del mismo color.
4. Agrupa las figuras del mismo color. Frente a cada grupo escribá la característica común.
5. Cuántos grupos diferentes encontraste, ¡nombralos! Ordena los nombres de acuerdo con la característica del grupo correspondiente.

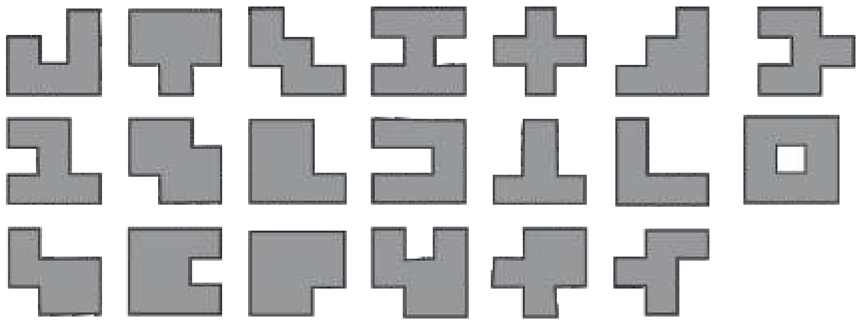


Anexo B. Cuestionario piloto

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA- MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INSTRUMENTO - CLASIFICACIÓN Y ORDENACIÓN

Nombres: ______________________________ Fecha: _____________ Grado:________

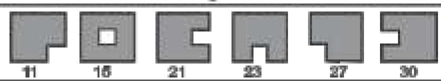
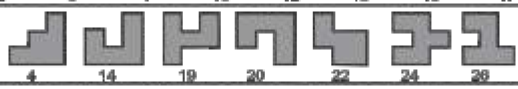
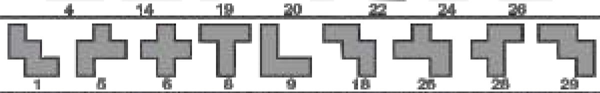
Para las figuras que tengan la misma área píntalas del mismo color. Después de tener listos los grupos ordénalos de menor a mayor área.



Anexo C.a. Tipos de estrategias

Estrategias cuantitativas	Estrategias Cualitativas
Conteo directo	Equidescomposición
Conteo por complementación	Transformación geométrica
Conteo por diferencia	Comparación cualitativa
Conteo de elementos de un polígono	Analogía con objetos cotidianos

Anexo C.b. Conjuntos de la clasificación de referencia

Conjunto	Figuras
Conjunto I	
Conjunto II	
Conjunto III	
Conjunto IV	

Anexo D.b. Resumen del conjunto I y II para el alumno B

Estudiante B						
Conj.	Figura	Estrategia	Razonamiento	Habilidad	Atributos (Rcl) del área	
Conjunto I	11,	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual y Lógica	Inva/cong Elec. de escala	Forma y posición
	21,23,30	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	15 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	Inva/cong	Forma
Conjunto II	2,3	Transf. Geométrica.	Deductivo.	Visual	Inva/cong	Forma y posición
	7, 10, 13 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	Inva/cong	Forma
	12 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	16 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	17 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma

Anexo D.a. Resumen del conjunto I y II para el alumno B

Estudiante A						
Conj.	Figura	Estrategia	Razonamiento	Habilidad	Atributos (Rcl) del área	
Conjunto I	11,	Equidesc.	Deductivo	Visual y Lógica	Actividad	Forma y posición
	21,23,30	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual y Lógica	Diferencia.	Forma
	14 +	Transf. Geométrica.	Deductivo.	Visual y Lógica	Inva/cong.	Forma y posición.
Conjunto II	2,3	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	7, 10, 13 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	Inva/cong.	Forma y posición
	12 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual y Lógica	NP	Forma
	16, 17	Equidesc.	Deductivo.	Visual y Lógica	Actividad, Diferencia, Inva/cong.	Forma y posición

Anexo D.c. Resumen del conjunto I y II para el alumno C

Estudiante C						
Conj.	Figura	Estrategia	Razonamiento	Habilidad	Atributos (Rcl) del área	
Conjunto I	11,	Comparación Cuantitativa	Deductivo.	Visual y Lógica	Actividad	Forma y posición
	21,23,30	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	15 +	Conteo de elementos de un polígono	Analogía	Visual	NP	Forma
Conjunto II	2,3,10, 13 +	Analogía con obj. cotidianos.	Analogía	Visual	NP	Forma
	17, 16 +	Conteo de elementos de un polígono	Analogía	Visual y Lógica	NP	Forma
	12 +	Conteo de elementos de un polígono	Analogía	Visual y Lógica	Elec de escala	Forma
	17 +	Comparación Cuantitativa	Analogía	Visual y Lógica	Actividad Elec de escala	Forma

Referencias

Apostol, T. (1984). *Calculus* (vol. I). Barcelona: Reverté.

Artigue, M. (1990). "Epistémologie et didactique". *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2-3), 241-286.

Azcárate, C. (1995). "Sistemas de representación". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, 53-61.

Bressan, A. (s. f.). El modelo del desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele. Consultas del resumen de características por niveles de los procesos definir y demostrar [en línea]. Consultado en <http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas_modelovanhiele.pdf>.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1994). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. C. (1995). "Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria". UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 3, 31-53.

D'Amore, B. (2001). "Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición 'ingenua' de una teoría 'realista' 'versus' el modelo 'antropológico' en una teoría "pragmática". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, 51-76.

Díaz, M. y Poblete Letelier, A. (2001). "Categorizando tipos de problemas en álgebra". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, 93-103.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

González Orozco, S. (2011a). *Formación de conceptos en la enseñanza de las matemáticas* [manuscritos del Seminario de Trabajo de Grado de Maestría en Educación]. Ibagué: Universidad del Tolima.

González Orozco, S. (2011b). *El concepto de área* [manuscritos del Seminario de Trabajo de Grado de Maestría en Educación]. Ibagué: Universidad del Tolima.

Gordillo Ardila, J. A. (2006). *Ingenio matemático 6*. Bogotá: Voluntad.

Goswami, U. (2001). "El razonamiento analógico en los niños". En Gentner, D.; Holyoak, K. y Kokinov, B. (eds.), *Perspectivas y onthough idioma: interrelaciones en el desarrollo* (pp. 225-277). Londres: Cambridge University Press.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). "El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: los giros". *Educación Matemática*, 3(2), 49-65.

Hoffer, A. (1990, abril). "La geometría es más que demostración". *Notas de Matemática*, 29, 10-24.

Jaime, A. (1998). "¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?". En Gutiérrez, A. y Jaime, A. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática* (pp. 23-43). México: Una Empresa Docente [en línea]. Consultado en <http://funes.uniandes.edu.co/ 674/1/Gutierrez1998Geometria.pdf>.

Mántica, A. M.; Götte, M. y Dal Manso, M. S. (2005). "Un camino para la comprensión del concepto de área". *Yupana,* 2, 25-40 [en línea]. Consultado en <http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/publicaciones/bitstream/1/2665/1/YUPANA_2_2005_pag_25_40.pdf>.

República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Piaget, J. (2001). *Psicología y pedagogía*. Barcelona: Crítica.

Rico, L. (1995). "Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas". *Revista EMA*, 1(1), 4-24 [en línea]. Consultado en <http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf

Segovia, I.; Castro, E. y Flores, P. (1996). "El área del rectángulo". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 10, 63-77.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Turégano Moratalla, P. (1989). "Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área". Ensayos. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 3, 235-256 [en línea]. Consultado en <http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista3/r3a20.pdf>.

Turégano Moratalla, P. (1996). "Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 10, 9-27.

Turégano Moratalla, P. (2006). "Una interpretación en la formación de conceptos y su aplicación en el aula". *Ensayos. Revista de la Facultad de Educación de Albacete,* 21, 35-48 [en línea]. Consultado en <http://documat.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2280879&orden=79370>.

Vinner, S. (1991). "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics". En Tall, D. (ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Hiele, P. M. (1957). *A children's thought and geometry*. Washington: Resarch in Science Educatio-Program of The National Science Foundation.

Referencia

Milton Rodríguez Santos y Danny Jovel Escobar, "El concepto de área: acercamiento basado en las concepciones de estudiantes de educación básica", revista *Perspectivas Educativas*, Ibagué, Universidad del Tolima, Vol. 4, (enero-diciembre), 2011, pp. 303 - 328

Fecha de recepción: 26/07/11 Fecha de aprobación: 10/09/11