

Dinámica no lineal del ADN mediante la solución de la ecuación de seno Gordon por el método de la función exponencial

Nonlinear dynamics of DNA by solving sine Gordon equation for exponential function method

Francis Segovia-Chaves^I & Oviedo Torres Mauricio^{II}.

Resumen: El ADN o ácido desoxirribonucleico es una molécula de vital importancia en la biología debido a que posee el material genético de todos los organismos y además lleva la información necesaria para sintetizar proteínas y cumplir la función fundamental en la replicación celular mediante procesos de desnaturalización. En este trabajo se demuestra que la dinámica del ADN durante procesos de semidesnaturalización, conduce a una dinámica no lineal mediante una ecuación diferencial parcial hiperbólica de seno Gordon. Haciendo uso del método de la función exp propuesto por He y Wu en el 2006, discutimos las soluciones tipo solitón para una, dos y tres ondas. Para ello, solucionamos la ecuación diferencial no lineal mediante una reducción a un sistema de ecuaciones lineales algebraicas para una transformación adecuada de la función de onda incógnita.

Palabras clave: ADN, desnaturalización, ecuación seno Gordon, métodos función exp, soluciones multi-onda.

Abstract: Deoxyribonucleic acid or DNA is at biology a vital molecule because has the genetic material of all organisms also leads the information needed to synthesize proteins and plays the key role in cell replication by denaturation processes. This paper demonstrates the dynamics of DNA during semi-denaturation processes leads to a nonlinear dynamics using a differential equation, a hyperbolic partial of sine Gordon. We using the method proposed by He and Wu in 2006 exponential function, we discuss the type soliton solutions for one, two and three waves. We solve the nonlinear differential equation by reducing a system of linear algebraic equations for proper processing of the wave function unknown.

Keywords: DNA, denaturation, sine Gordon equation, exp function methods, multiwave solutions.

^I Ph.D(c) en Física, docente Programa de Física. Grupo de Física Teórica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana, Neiva-Huila. francis.segoviac@gmail.com

^{II} Estudiante pregrado Programa de Física. Universidad Surcolombiana.

1. INTRODUCCIÓN

El ADN es un tipo de biopolímero cuya principal característica es el contener las instrucciones genéticas de cualquier organismo en la naturaleza, pues le permiten su desarrollo y funcionamiento. Una de las características principales de esta molécula es que está constituida por dos cadenas o bandas formadas por un elevado número de compuestos químicos llamados nucleótidos. Esta configuración genera la forma del ADN en doble hélice, cuya unión entre ambos se debe a que los nucleótidos que contienen adenina se acoplan siempre con los que tienen timina y los que contienen citosina con los que contienen guanina. A estas uniones se les denomina puentes de hidrógeno. El ADN presenta propiedades físicas como la temperatura, presión, viscosidad (Salas A. & Castillo J., 2012), junto con las investigaciones adelantadas sobre la dinámica de esta molécula como la desnaturalización del ADN para altas temperaturas (Sturtevant, 1958; Takeno, 1983; Calvo, 2005), proporcionan información relacionada con las consecuencias que trae el rompimiento de los puentes de hidrógeno por cambios en las condiciones físicas. En particular, en un estado abierto es posible encontrar excitaciones solitónicas (Englander, 1980; Polozov, 1988) las cuales pueden llegar a estar vinculados a potenciales efectivos (Yakushevich, 2001) y vibraciones longitudinales (Xiao, 1987).

En la actualidad, existen diferentes métodos para hallar las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, entre los más conocidos tenemos la transformación de Backlund, soluciones de ondas viajeras, el de dispersión inversa y el método de separación de variables (Drazin, 1996; Pierson, 1992; Gardner, 1967; Burstev, 1987). En el 2006 surge un nuevo método de solución para ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la física matemática, denominado método de la función *exp* (He, 2006). Este método ha sido ampliamente utilizado por muchos autores para obtener soluciones de ondas viajeras y no viajeras, como también soluciones periódicas de ecuaciones de onda no lineales. En el presente trabajo, siguiendo los lineamientos para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales de He, estudiaremos la dinámica del ADN. Sin embargo, debemos tener en cuenta que trabajos pioneros para describir los modelos no lineales sobre la dinámica del ADN son discutidos usando la ecuación no lineal de Klein-Gordon (Scott, 1969), pero pretendemos realizar un análisis particular al considerar un rompimiento de los puentes de hidrógeno teniendo los extremos fijos, los cuales generan soluciones solitónicas de la ecuación seno Gordon mediante el método de la función exponencial. Tal método lo consideramos de gran importancia pues se logra obtener soluciones para n ondas. Generalmente las ondas de gran amplitud tienden a ser ondas no lineales y no cumplen el principio de superposición lineal, centrando la atención en un problema de dispersión. Los efectos combinados de un problema no lineal y de dispersión, son analizados en la dinámica del ADN siendo este un problema de ondas solitarias. Si bien, el ADN está inmerso en sustancias con propiedades de viscosidad, generando un análisis no lineal a la ecuación perturbada como lo proponen Salas A. (2012), es posible en primera aproximación, el considerar que las propiedades disipativas se pueden descartar debido a que tanto la solución no lineal perturbada y no perturbada generan soluciones casi idénticas en el ADN.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

El presente trabajo se encuentra esencialmente dividido en dos partes: En la primera, se hace una introducción a la ecuación de seno Gordon (sG) para el modelo del ADN. Consideramos una cadena de n

péndulos acoplados para luego hacer la aproximación al continuo, es decir, si el número de péndulos aumenta y la distancia de separación entre ellos disminuye, propiedad esencial ya que el tamaño del ADN es muy pequeño con lo cual logramos deducir la ecuación sG no perturbada. En la segunda parte, solucionamos la ecuación sG no perturbada sin tener en cuenta funciones de disipación de Rayleigh. Siguiendo el método de la función exp propuesto por S. Zhang et. al (2013), solucionamos la ecuación sG, obteniendo soluciones multionda que permiten describir la dinámica de las soluciones.

2.1 Ecuación de seno Gordon (sG) en un conjunto de péndulos acoplados como modelo del ADN.

Consideramos la molécula como un sistema que contiene muchos átomos y grados de libertad. Para este modelo se plantea escoger el estado del ADN como un estado abierto en un proceso de desnaturalización donde los puentes de hidrógeno entre las bases están rotos. Por lo tanto, tenemos al ADN como un modelo donde las bases de los extremos están fijos y la estructura del esqueleto azúcar-fosfato es una cadena de osciladores acoplados y las bases son péndulos idénticos de longitud l , masa m y separados a una distancia d como se observan en la figura 1. El ángulo de rotación de cada uno de los péndulos se describe por la variable φ (sabiendo que el ángulo de rotación entre cada base en el ADN es aproximadamente 36° , donde sería el estado cerrado antes de la desnaturalización o estado abierto). Imponemos la condición de que los extremos de los péndulos son fijos, es decir, las bases extremas están fijas. La situación de energía mínima es la de todos los péndulos abajo, o sea, su estado cerrado.

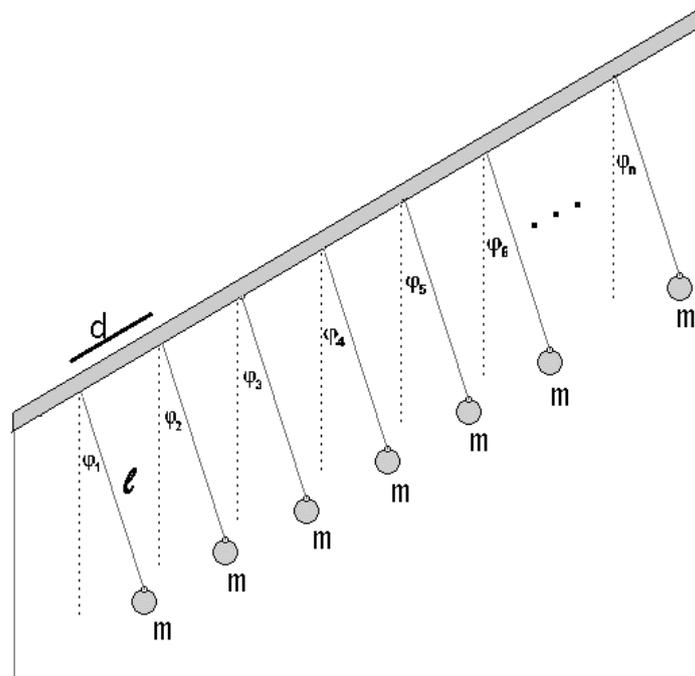


Figura 1. Representación de un conjunto de n péndulos idénticos de longitud l , masa m y separados a una distancia d .

El lagrangiano del sistema para el conjunto de péndulos acoplados viene dado por la suma de la energía cinética y potencial gravitatoria

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \sum_{i=0}^{n+1} \dot{\varphi}_i^2 - mgl \sum_{i=0}^{n+1} (1 - \cos \varphi_i) - \frac{1}{2} K \sum_{i=0}^{n+1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad (1)$$

En la ecuación (1), K es la constante de deformación del esqueleto azúcar-fosfato y g es la aceleración de la gravedad. De acuerdo con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (2)$$

Al reemplazar en (2) el lagrangiano dado por (1), obtendremos las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \ddot{\varphi}_i = -\omega_1^2 \sum_{i=0}^{n+1} \text{Sen} \varphi_i - \omega_0^2 \sum_{i=0}^{n+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) \quad (3)$$

En la anterior ecuación hemos definido las constantes:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{ml^2} \quad (4)$$

Como los extremos del sistema de péndulos son fijos, esto implica que la sumatoria va desde $i=1$ hasta $i=n$. Según lo anterior, la ecuación (3) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \{ \ddot{\varphi}_i + \omega_1^2 \text{Sen} \varphi_i + \omega_0^2 [(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + (\varphi_{i-1} - \varphi_i)] \} = 0 \quad (5)$$

La velocidad de la onda sobre el esqueleto azúcar-fosfato viene dada por $\frac{\eta}{\rho l^2} \equiv v^2$. Ahora realizamos una aproximación al continuo, esto es, al considerar que tenemos un número muy grande de n péndulos, la distancia d de separación entre ellos se hace muy pequeña. Es válida la siguiente aproximación:

$$(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \approx d^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (6)$$

Al reemplazar la ecuación (6) en (5), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_1^2 \text{Sen} \varphi = 0 \quad (7)$$

Realizamos un cambio de variable para escribir la ecuación (7) de forma adimensional:

$$z = \frac{\omega_1}{v} x \quad \text{y} \quad \tau = \omega_1 t \quad (8)$$

Al efectuar las primeras y segundas derivadas de la ecuación (8), y reemplazar en la ecuación (7) finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\text{sen} \varphi \quad (9)$$

La ecuación (9) se denomina ecuación de seno Gordon (sG), ecuación que se resolveremos a continuación.

2.2 Solución de la ecuación sG por el método generalizado de la función exponencial

Consideremos la transformación de la forma

$$\varphi(\tau, Z) = 4 \arctan \psi(\tau, Z) \quad (10)$$

Las segundas derivadas de la ecuación (10), respecto a τ y Z son:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = -8 \text{Sen} \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \text{Cos}^3 \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + 4 \text{Cos}^2 \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = -8 \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \operatorname{Cos}^3 \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 + 4 \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{1}{4} \varphi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{Cos}^2 \left(\frac{1}{4} \varphi \right) = \frac{1}{\psi^2 + 1} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{4\psi(1-\psi^2)}{(\psi^2+1)^2} \quad (13)$$

Reemplazamos en la ecuación (9) las derivadas dadas por las ecuaciones (11) y (12), junto con las relaciones dadas por la ecuación (13) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 - 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \psi - \psi^3 = 0 \quad (14)$$

La solución de la ecuación (14) por el método generalizado de la función \exp permitirá obtener la solución de la ecuación sG. Para ello debe tenerse en cuenta que en general una ecuación diferencial no lineal de dos variables z y τ , puede representarse como:

$$P(\psi, \psi_\tau, \psi_z, \psi_{\tau z}, \psi_{\tau\tau}, \psi_{zz}, \dots) = 0 \quad (15)$$

Donde P es un polinomio de ψ y sus derivadas. El método de la función \exp se fundamenta en obtener la solución de n ondas asumiendo soluciones de la forma:

$$\psi(\tau, Z) = \frac{\sum_{i_N=0}^{P_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g \xi_g}}{\sum_{j_N}^{Q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g \xi_g}} \quad (16)$$

Donde $\xi_g = k_g Z + c_g \tau + \omega_g$, siendo ω_g una constante; $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$ y $b_{j_1 j_2 \dots j_N}$ son constantes que deben ser determinadas. Ahora presentamos diferentes casos de soluciones a través de la ecuación (16).

Solución para $n=1$

Para el caso de una onda se expande (16), obtendremos así una solución de (14) de la forma:

$$\psi(\tau, Z) = \frac{a_1 e^{\xi_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1}} \quad (17)$$

Donde $\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1$. Efectuamos las primeras y segundas derivadas de la ecuación (17):

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{a_1 k_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{a_1 c_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \frac{a_1 c_1^2 e^{\xi_1} (1 - b_1 e^{\xi_1})}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^3} \quad (18)$$

Reemplazamos en la ecuación (14), las ecuaciones dadas por (18)

$$e^{\xi_1} (a_1 c_1^2 - a_1 k_1^2 - a_1) + e^{2\xi_1} (a_1 b_1 c_1^2 - a_1 b_1 k_1^2 - 4a_1 b_1) + e^{3\xi_1} (-a_1 b_1^2 c_1^2 - a_1^3 c_1^2 + a_1^3 k_1^2 - 6a_1 b_1^2) + e^{4\xi_1} (-a_1 b_1^3 c_1^2 + a_1 b_1^3 k_1^2 - a_1^3 b_1 c_1^2 + a_1^3 b_1 k_1^2 - 4a_1 b_1^3 + 2a_1^3 b_1) + e^{5\xi_1} (-a_1 b_1^4 + a_1^3 b_1^2) = 0 \quad (19)$$

Igualando a cero cada uno de los coeficientes e^{ξ_i} de la ecuación (19), obtendremos un sistema de ecuaciones para a_1, b_1, c_1 y k , cuyas soluciones vienen dadas por:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1} \quad \text{y} \quad b_1 = 0 \quad (20)$$

Determinamos así la solución de la ecuación diferencial (14) por el método generalizado de la función \exp . Especial interés en nuestro caso es la solución de la ecuación sG (9), ya que al tener en cuenta los resultados dados por la ecuación (20) y reemplazarlos en la ecuación (17), hallamos la solución para una onda:

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left(a_1 e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1}\right) \quad (21)$$

Solución para $n=2$

Siguiendo el mismo procedimiento para una onda, en el caso de $n=2$, expandimos (16) en la forma,

$$\psi(\tau, Z) = \frac{a_{10} e^{\xi_1} + a_{01} e^{\xi_2}}{1 + b_{11} e^{\xi_1 + \xi_2}} \quad (22)$$

En la ecuación (22), los coeficientes ξ_1 y ξ_2 vienen dados por:

$$\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1 \quad \text{y} \quad \xi_2 = k_2 Z + c_2 \tau + \omega_2 \quad (23)$$

Efectuamos las segundas derivadas de (22) y reemplazamos en (14); luego al igualar potencias obtendremos un sistema de ecuaciones con coeficientes a determinar b_{11} , c_1 y c_2 . Después de efectuar las operaciones algebraicas se obtienen las siguientes soluciones:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1}, \quad c_2 = \pm \sqrt{k_2^2 - 1} \quad b_{11} = a_{10} a_{01} M_{12} \quad (24)$$

En la ecuación (24), el coeficiente M_{12} se encuentran determinados de la siguiente manera:

$$M_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2 - (c_1 - c_2)^2}{(k_1 + k_2)^2 - (c_1 + c_2)^2} \quad (25)$$

Según lo anterior, la solución de la ecuación sG para dos ondas viene es:

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left(\frac{a_{10} e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1} + a_{01} e^{k_2 Z \pm \sqrt{k_2^2 - 1}\tau + \omega_2}}{1 + a_{10} a_{01} M_{12} e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1 + k_2 Z \pm \sqrt{k_2^2 - 1}\tau + \omega_2}}\right) \quad (26)$$

Solución para $n=3$

En este caso, la solución propuesta es de la forma:

$$\psi = \frac{a_{100} e^{\xi_1} + a_{010} e^{\xi_2} + a_{001} e^{\xi_3} + a_{111} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}}{1 + b_{110} e^{\xi_1 + \xi_2} + b_{101} e^{\xi_1 + \xi_3} + b_{011} e^{\xi_2 + \xi_3}} \quad (27)$$

Donde $\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1$, $\xi_2 = k_2 Z + c_2 \tau + \omega_2$ y $\xi_3 = k_3 Z + c_3 \tau + \omega_3$. Las constantes a determinar vienen dadas por:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1}, \quad c_2 = \pm \sqrt{k_2^2 - 1}, \quad c_3 = \pm \sqrt{k_3^2 - 1} \quad (28)$$

$$b_{110} = a_{100} a_{010} A_{12}, \quad b_{101} = a_{100} a_{001} A_{13} \quad (29)$$

$$b_{101} = a_{100} a_{001} A_{13}, \quad b_{011} = a_{010} a_{001} A_{23} \quad (30)$$

$$b_{011} = a_{010} a_{001} A_{23}, \quad a_{111} = a_{100} a_{001} a_{010} A_{12} A_{13} A_{23} \quad (31)$$

Hemos definido:

$$A_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2 - (c_i - c_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - (c_i + c_j)^2}; \quad 1 \leq i < j \leq 3 \quad (32)$$

En definitiva, la solución de la ecuación sG para $n=3$ se encuentra determinada por:

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left(\frac{a_{100} e^{\xi_1} + a_{010} e^{\xi_2} + a_{001} e^{\xi_3} + a_{111} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}}{1 + b_{110} e^{\xi_1 + \xi_2} + b_{101} e^{\xi_1 + \xi_3} + b_{011} e^{\xi_2 + \xi_3}}\right) \quad (33)$$

Presentamos a continuación los resultados obtenidos anteriormente, para ello hacemos uso del software Mathematica.

3. RESULTADOS

Para el caso de una sola onda ($n=1$) escogiendo el signo positivo en la solución de la ecuación sG (21), cualitativamente se obtiene la solución de una onda solitónicas tipo kink. Comparando esta solución con los resultados obtenidos por Salas y Castillo (2012), se observa un comportamiento cualitativo sin gran diferencia con el reportado; por lo tanto, la ecuación diferencial perturbada del seno Gordon en el caso del medio donde está inmerso el ADN no afecta considerablemente el movimiento. Lo anterior claramente se puede apreciar en la figura 2.

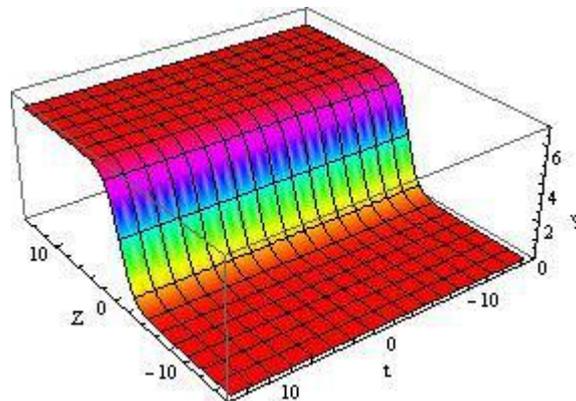


Figura 2. Evolución espacial de la solución de la ecuación sG para $n=1$. Se eligieron los parámetros $a_1 = 1$, $k_1 = 1$ y $\omega_1 = 0$, (Zhang, 2013)

En el caso de dos ondas ($n=2$), en la figura 3 presentamos los perfiles de evolución de la solución de la ecuación sG dada por la ecuación (26) a medida que el tiempo aumenta. La interacción entre los solitones kink para diferentes tiempos y sus propiedades asintóticas en diferentes posiciones Z se representan en la figura 4.

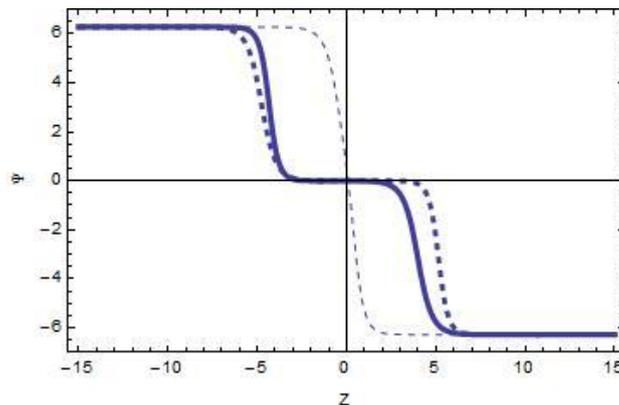


Figura 3. Evolución de la solución dada por la ecuación (26), con $a_{10} = -2$, $a_{01} = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = 0$. La curva de línea continua corresponde a $t=-5$, la curva a trazos delgados es para $t=0$ y la curva a trazos gruesos para $t=5$

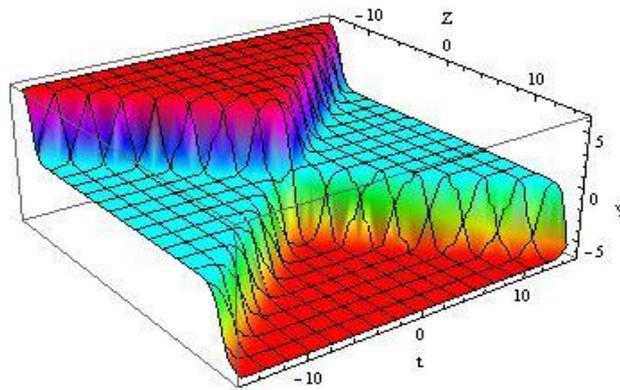


Figura 4. Evolución espacial de la solución de dos ondas (33) para $a_{10} = -2, a_{01} = 3, k_1 = 2, k_2 = -3, \omega_1 = 0$ y $\omega_2 = 0$

En la figura 5, representamos la evolución espacial de la solución para tres ondas dada por la ecuación (33).

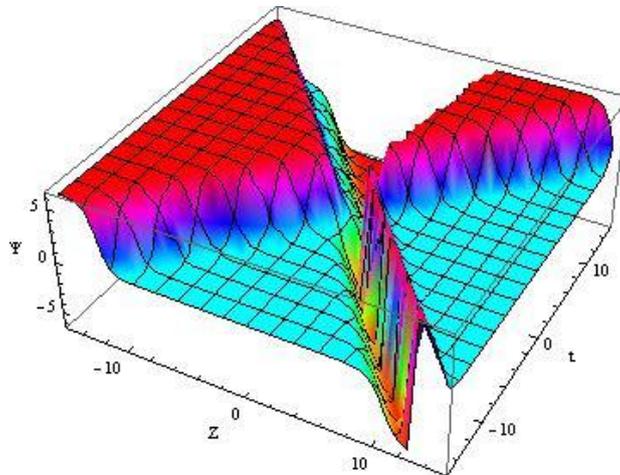


Figura 5. Evolución espacial de la solución de tres ondas para la ecuación (33) con $a_{100} = -2, a_{010} = 5, a_{001} = -3, k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = \frac{3}{2}, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0,$ y $\omega_3 = 0$.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo logramos representar las soluciones multionda de la ecuación diferencial del seno Gordon mediante el método de la función exp. Dicha ecuación se obtiene tomando el ADN como un modelo de n péndulos acoplados donde cada uno representa las bases, la varilla el esqueleto azúcar-fosfato y el sistema se encuentra en un estado abierto donde podría ser un proceso de desnaturalización. Las soluciones pueden ser comparadas con las reportadas en la literatura científica para solitones kink y antikink, tales soluciones podrían generarse por la dinámica presente en los procesos de replicación de esta molécula. Encontramos que tanto una solución con la ecuación diferencial perturbada y no perturbada no presenta una diferencia considerable. Las constantes presentes en la solución solo realizan efecto de un corrimiento o estiramiento del frente de onda. Por último, es de notar que el método de la función exponencial permite aplicarse a otros tipos de ecuaciones diferenciales, presentes en la física matemática.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Bursteve, S. P., V. E. Zakharov y A. V. Mikhailov (1987). The inverse scattering methods with variable spectral parameter. *Theor. Math. Phys.* 70, p. 232-241.
- Calvo, G. y R. Álvarez (2005). Three dimensional models for homogeneous DNA denaturation. *J. Phys. Condens. Matter*, p. 7755-7781.
- Drazin, P. G. y R. S. Johnson (1996). *Solitons: an Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Englander S., N. Kallenbach, A. Heeger, J. Krumhans y S. Litwin (1980). Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 77(12), p. 7222–7226.
- Gardner, C. S., J. M. Green, M. D. Kruskal and R. Miura (1967). Methods for solving the Korteweg de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 19, p. 1095-1097.
- He, J.H. and X. H. Wu (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals* 30, P. 700-708.
- Pierson, W. J., M. A. Donelan and W. H. Hui (1992). Linear and nonlinear propagation of water wave groups, *J. Geophys. Oceans*, 97, p. 5607-5621
- Polozov R. y L. Yakushevich (1988). Nonlinear waves in DNA and regulation of transcription. *J. Theor. Biol.*, 130, p.423– 430.
- Scott, A.C. (1969). A nonlinear Klein-Gordon equation”, *Am. J. Phys.* 37, p. 52-61.
- Salas, A. y J. Castillo (2012). La ecuación Seno-Gordon perturbada en la dinámica no lineal del ADN. *Revista Mexicana de Física*, 58, p. 481-487.
- Sturtevant, J. y E. Geiduschek (1958). The heat of denaturation of DNA. *J. Am. Chem. Soc.*, 80(11), p. 2911.
- Takeno, S. y S. Homma (1983). Topological Solitons and Modulated Structure of Bases in DNA Double Helices. *Prog. Theor. Phys.* 70, p. 308-311.
- Xiao, J., J. Lin y G. Zhang (1987). The influence of longitudinal vibration on soliton excitation in DNA double hélices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20 (9), p. 2425.
- Yakushevich, V. (2001). Is DNA a nonlinear dynamical system where solitary conformational waves are possible? *J. Biosci.* 26 (3), p. 305-313.
- Zhang, S., J. Wang, A. Peng y B. Cai (2013). A generalized exp-function method for multiwave solutions of sine Gordon equation, *J. Phys. Pramana*, 81, p. 763-773.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Dinámica no lineal del ADN mediante la solución de la ecuación de seno Gordon por el método de la función exponencial. Francis Segovia-Chaves ^I & Oviedo Torres Mauricio ^{II} . Revista Tumbaga (2015), 10, vol.2, 62-71	Días /mes /año 14/07/2015	Días/mes/año 05/09/2015